3. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Definice 1 (Konstrukce integrálu)**.** Nechť $D, D' \in S$ a $f : D \to \mathbb{R}$ je měřitelná funkce. Integrál $\int_D f d\mu$ vybudujeme ve třech krocích. V prvních dvou krocích předpokládáme $D = D'$.

1. Je-li f **nezáporná** měřitelná funkce, definujeme

$$\int_D f \mathrm{d}\mu = \sup\{\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \mu(A_j) : \{A_j\} \text{ je rozklad } D\ , 0 \le \alpha_j \le f \text{ na } A_j, j = 1 \dots m\}.$$

Součty vyskytující se v předchozím vzorci nazýváme dolními součty k funkci f . Integrál z nezáporné měřitelné funkce je definován vždy, může ovšem nabývat nekonečné hodnoty.

2. V obecném případě, kdy f je měřitelná funkce na D, definujeme

$$\int_D f \mathrm{d}\mu = \int_D f^+ \mathrm{d}\mu + \int_D f^- \mathrm{d}\mu$$

pokud rozdíl v výše má smysl. Pokud

$$\int_D f^+ = \int_D f^- = \infty$$

zůstává integrál funkce f nedefinován.

3. Je-li f měřitelná (přesně: S-měřitelná) funkce na $D' \neq D$ a $\mu(D\ D') = 0$, je účelné definovat

$$\int_D f \mathrm{d}\mu = \int_{D \cap D'} f \mathrm{d}\mu$$

Smysl takového integrálu a výsledek samozřejmě v tom případě nezávisí na volbě D. V některých případech je účelné používat podrobnější zápis Je-li integrál $\int_D f \mathrm{d}\mu$ definován, říkáme též, že *má smysl*, nebo že funkce f *má integrál.* Je-li navíc tento integrál konečné číslo, říkáme, že $\int_D f \mathrm{d}\mu$ *konverguje* nebo že f *je integrovatelná.*

Věta 2 (Diskuse vztahu mezi Newtonem a Lebesguem)**.** Nechť f je spojitá funkce na intervalu (a, b).

1. Jestliže konverguje Lebesgueův integrál z f od a do b, konverguje i Newtonův a to absolutně.

2. Jestliže Newtonův integrál z f od a do b konverguje absolutně, konverguje i Lebesgueův.

3. Pokud konverguje jak Newtonův tak Lebesgueův, pak mají oba stejnou hodnotu.

4. Jestliže Newtonův integrál z f od a do b konverguje neabsolutně, pak Lebesgueův integrál nemá smysl.

Příklady

1. Určete λ míru množiny

   (a) $[0,1]$
   (b) $(0,1)$
   (c) $[2,6)$
   (d) $[0,\infty)$
   (e) přímky v $\mathbb{R}^2$
   (f) elipsa v $\mathbb{R}^2$
   (g) paraboloid v $\mathbb{R}^3$
   (h) $\{1\}$
   (i) $\mathbb{Q}$
   (j) $\mathbb{Q}\times(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$ v $\mathbb{R}^2$
   (k) Cantorovo diskontinuum

2. Najděte příklad množiny A tak, aby $\lambda(A)>0$, $\operatorname{int} A=\emptyset$

3. Vyšetřete **Lebesgueovy** integrály:

   (a) $\int_{-1}^{1} \operatorname{sgn} x \,\mathrm{d}x$
   (b) $\int_{-\infty}^{\infty} x \,\mathrm{d}x$
   (c) $\int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}}$
   (d) $\int_{-10}^{10} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$
   (e) Dirichletovy funkce přes interval $[0,1]$
   (f) Charakteristické funkce Cantorova diskontinua