Pro $a = -1$ je

$$\int \frac{1}{x}\,dx \stackrel{C}{=} \ln x$$

primitivní funkcí k funkci $\frac{1}{x}$ na $(1, +\infty)$, a tedy také zobecněnou primitivní funkcí. Odtud je zřejmé, že pro $a = -1$ integrál diverguje (neboť limita zobecněné primitivní funkce v nekonečnu existuje, ale není konečná).

Závěr: Konverguje (absolutně) pro $a < -1$.

3. $\displaystyle\int_0^\infty e^{ax}\,\mathrm{d}x$ kde $a \in \mathbb{R}$

Řešení: diplomka 4.1.1

4. $\displaystyle\int_c^\infty \frac{\ln^a x}{x}\,\mathrm{d}x,\ a \in \mathbb{R}$

Řešení: diplomka 4.1.1

5. $\displaystyle\int_3^\infty \frac{x-1}{x^2+2x}\,\mathrm{d}x$

Řešení: diplomka 4.1.2

6. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x+5}{x^3+3x^2-1}\,\mathrm{d}x$

Řešení: diplomka 4.1.3

7. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{x^3+1}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Konverguje - u 0 je funkce spojitá, u ∞ srovnáme s $1/x^2$.

8. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Konverguje - na intervalu $[0, 1]$ je funkce spojitá, na intervalu $[1, \infty)$ srovnáme s funkcí e^{-x}.

UKÁZKA

9. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arcctg}^a x}{x^b}\,dx$

Řešení:

Integrand f je nezáporná funkce, stačí tedy vyšetřovat absolutní konvergenci. K tomu použijeme limitní srovnávací kritérium a rozklad

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arcctg}^a x}{x^b}\,dx = \int_0^1 \frac{\operatorname{arcctg}^a x}{x^b}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arcctg}^a x}{x^b}\,dx$$

Má-li totiž (absolutně) konvergovat integrál vpravo, pak také konvergují (absolutně) oba integrály vlevo (integrujeme přes menší množinu). Naopak, pokud (absolutně) konvergují integrály vpravo, pak také konverguje (absolutně) integrál vlevo (existencí integrálů je zaručena existence zobecněné primitivní funkce na celém intervalu i konečnost integrálu).[2]

Vyšetřujme nyní (absolutní) konvergenci integrálu

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arcctg}^a x}{x^b}\,dx$$

Funkce $\frac{\operatorname{arcctg}^a x}{x^b}$ je spojitá a nezáporná na $(0,1]$, a protože

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{\operatorname{arcctg}^a x}{x^b}}{\frac{1}{x^b}} = \lim_{x\to 0+} \operatorname{arcctg}^a x = (\pi/2)^a$$

je (absolutní) konvergence vyšetřovaného integrálu ekvivalentní (absolutní) konvergenci integrálu

$$\int_0^1 \frac{1}{x^b}\,dx$$

Přímým výpočtem se přesvědčíme, že tento integrál konverguje pro $b < 1.$

Vyšetřujme nyní (absolutní) konvergenci integrálu

$$\int_1^\infty \frac{\operatorname{arcctg}^a x}{x^b}\,dx$$

Funkce $\frac{\operatorname{arcctg}^a x}{x^b}$ je spojitá a nezáporná na $[1,+\infty)$, a protože

$$\lim_{x\to+\infty} x\operatorname{arcctg} x = 1,$$

platí také, že

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\operatorname{arcctg}^a x}{x^b}}{\frac{1}{x^{a+b}}} = \lim_{x\to 0+} x^a \operatorname{arcctg}^a x = 1,$$

a tudíž je (absolutní) konvergence vyšetřovaného integrálu ekvivalentní (absolutní) konvergenci integrálu

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{a+b}}\,dx$$

Přímým výpočtem se přesvědčíme, že tento integrál konverguje pro $a+b>1$ a diverguje jinak.

Závěr: Integrál konverguje (absolutně), pokud $1 > b > 1-a$. Jinak diverguje.

10. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \arctan\frac{x}{x^2+1}\ln^a x\,dx$

Řešení:

[2]) Tento krok v následujících příkladech již nebudeme komentovat

Řešení. Integrand je spojitý na $(0, +\infty)$. Využijeme toho, že integrál $\int_0^\infty$ konverguje, právě když konvergují oba integrály $\int_0^1$ a $\int_1^\infty$.

Na intervalu $(0, 1]$ je integrand spojitý a platí $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{x^\alpha \operatorname{arctg}^\beta x}{x^{\alpha+\beta}} = 1$, a tedy $\int_0^1 x^\alpha \operatorname{arctg}^\beta x \, dx$ konverguje, právě když konverguje $\int_0^1 x^{\alpha+\beta} \, dx$, což je právě když $\alpha + \beta > -1$.

I na intervalu $[1, \infty)$ je integrand spojitý a platí $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^\alpha \operatorname{arctg}^\beta x}{x^\alpha} = (\pi/2)^\beta$, tudíž $\int_1^\infty x^\alpha \operatorname{arctg}^\beta x \, dx$ konverguje, právě když konverguje $\int_1^\infty x^\alpha \, dx$, což je právě když $\alpha < -1$.

Závěr je, že integrál ze zadání konverguje, právě když $\alpha < -1 < \alpha + \beta$. ∎

§26. Dále můžeme použít některé věty používané při výpočtu určitého integrálu, konkrétně **metodu per partes** z §12 a **věty o substituci** podle §13 a zvláště §14.

<u>Příklad</u> Integrál $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} \, dx$ konverguje, právě když $\alpha > 0$.

Řešení. Již víme z §24, že pro $\alpha > 1$ tento integrál konverguje absolutně. Z §23 dále víme, že pro $\alpha \le 0$ integrál diverguje. Pro $\alpha \in (0, 1]$ (nebo rovnou pro všechna $\alpha > 0$) můžeme použít metodu per partes. Tedy

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} \, dx = \left[\frac{-\cos x}{x^\alpha} \right]_1^\infty - \int_1^\infty \frac{\alpha \cos x}{x^{\alpha+1}} \, dx,$$

jsou-li aspoň dva ze tří uvedených výrazů reálným číslem. Přitom zobecněný přírůstek na pravé straně je reálným číslem pro každé $\alpha > 0$ a integrál na pravé straně pro $\alpha > 0$ konverguje absolutně podle srovnávacího kritéria. Tedy i integrál na levé straně konverguje. ∎

<u>Příklad</u> Pro které hodnoty $\alpha \in \mathbb{R}$ konverguje $\int_1^\infty \sin(x^\alpha) \, dx$?

Řešení. Pokud $\alpha < 0$, pak $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x^\alpha}{x^\alpha} = 1$, a tedy integrál konverguje, právě když konverguje $\int_1^\infty x^\alpha \, dx$. To je právě pro $\alpha < -1$.

Pro $\alpha = 0$ integrál diverguje, protože je to integrál z nenulové konstantní funkce $\sin 1$ na neomezeném intervalu.

Zbývá vyšetřit případ $\alpha > 0$. Použijme druhou substituční metodu z §14 pro funkci $\varphi(t) = t^{1/\alpha}$. Pak

$$\int_1^\infty \sin(x^\alpha) \, dx = \int_1^\infty \frac{1}{\alpha} t^{\frac{1}{\alpha}-1} \sin t \, dt,$$

pokud aspoň jeden z integrálů konverguje. Přitom integrál na pravé straně podle předchozího příkladu konverguje, právě když $\frac{1}{\alpha} - 1 < 0$, tj. $\alpha > 1$.

(1)

Př:

$$\int_0^\infty \frac{|\ln x|^\alpha}{1+x^k}\,dx \qquad \alpha, k \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{|\ln x|^\alpha}{1+x^k}$$ nezáporná, spojitá na $(0,1)$ a $(1,\infty)$

v bodě 1: co když $\alpha < 0$? pak nedef

Singularita: $0, 1, \infty$

"0": $k \geq 0$ $\quad x^k \leq 1$ $\quad$ 1 vede nad x^k

$k < 0$ $\quad x^k > 1$ $\quad$ x^k vede nad 1

! bývá výhodné vytknout vedoucí člen

$$\frac{|\ln x|^\alpha}{1+x^k} = \frac{|\ln x|^\alpha}{x^k(1+x^{-k})}$$

• $k \geq 0$ $\quad g(x) = |\ln x|^\alpha$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{1}{1+x^k} = 1 \in (0,\infty)$$

$$\int_0^{1/e} f(x)\,dx \text{ k} \iff \int_0^{1/e} |\ln x|^\alpha\,dx \text{ k} \iff \alpha \in \mathbb{R}$$ (srovnání x^0)

• $k < 0$ $\quad g(x) = \frac{|\ln x|^\alpha}{x^k}$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{x^k}{1+x^k} = \lim \frac{1}{1+x^{-k}} = 1 \in (0,1)$$

$$\int_0^{1/e} f(x)\,dx \text{ k} \iff \int_0^{1/e} \frac{|\ln x|^\alpha}{x^k} \quad k<0 \text{ k} \iff \alpha \in \mathbb{R}$$

celkem: u 0 konv. $\forall k, \alpha \in \mathbb{R}$

(1)

"1"

jmenovatel je kamarád :) $1+x^k \to 2 \quad \forall k$

$|\ln x|^\alpha \approx |1-x|^\alpha$ neb $\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

$g(x) = (1-x)^\alpha$

$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{1}{1+x^k} = \frac{1}{2} \in (0, \infty)$

!! nutno vyšetřit z obou stran

- $\int_{1/e}^{1} f(x)\ k \iff \int_{1/e}^{1} g(x)\,dx\ k \iff \int_{1/e}^{1} (1-x)^\alpha\ k \iff \alpha > -1$

- $\int_{1}^{e} f(x)\,dx\ k \iff \qquad \alpha > -1$

"∞"

- $k \geq 0$ $\quad 1+x^k \approx x^k \quad 1+x^k = x^k(1+x^{-k})$

$g(x) := \frac{|\ln x|^\alpha}{x^k}$

$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{x^k}{1+x^k} = \begin{cases} 1 & k \neq 0 \\ 1/2 & k = 0 \end{cases} \in \mathbb{R}$

$\int_{e}^{\infty} f(x)\,dx\ k \iff \int_{e}^{\infty} \frac{|\ln x|^\alpha}{x^k}\,dx \iff$ buď $k > 1 \quad \alpha \in \mathbb{R}$ nebo $k = 1 \quad \alpha < -1$

- $k < 0$ $\quad g(x) := |\ln x|^\alpha \quad 1+x^k \approx 1$

$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

$\int_{e}^{\infty} f(x)\,dx\ k \iff \int_{e}^{\infty} |\ln x|^\alpha\ k \iff$ NIKDY

Závěr $\int_{0}^{\infty} f(x)\,dx\ k \iff k > 1 \ \&\ \alpha > -1$

což jsme vlastně chtěli ukázat.

Jelikož nyní $\int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{2x}\,dx = +\infty$, je $\int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}}\,dx = +\infty$.

Jak je to s integrálem $\int_1^{x_0} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3+1}}$, je-li $x_0 > 1$?

b/ použijete-li cvičení 3,27 /což vlastně není nic jiného, než rychle provedená část a/ /, je vzhledem k

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}} \cdot x = 1 \,, \quad \alpha = 1$$

dokázáno, že $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3+1}} = +\infty$. ||

Celý postup si dobře rozmyslete a jednotlivé kroky podrobně odůvodněte!

3,31. Dokažte, že $\int_0^1 \frac{\log(1+x^2)}{1+x^2}\,dx$ konverguje !

|| Ukažte, že integrál existuje jako Riemannův ! ||

Při vyšetřování konvergence integrálů, je třeba velmi dobře znát chování jednotlivých funkcí - zvláště v okolí "nepříjemných" bodů. Zopakujte si proto, jak vypadají například následující limity:

$$\lim_{x\to 0_+} x^n \cdot \log^k x \,, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^k}{e^x} \,, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^k}{\log x} \,, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \,,$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \,, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \,, \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} \,, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} \,, \ \ldots$$

3,32. Dokažte, že $e^{-x^2} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$!

1/ Funkce e^{-x^2} je spojitá a kladná v intervalu $(0,+\infty)$, tedy $e^{-x^2} \in \mathcal{L}^{R}_{(0,+\infty)}$.

2/ Zřejmě $e^{-x^2} \in \mathcal{L}_{(0,9)}$ /proč?/; protože $\lim_{x\to+\infty} e^{-x^2} \cdot x^2 = 0$, je podle cvičení 3,25 i $e^{-x^2} \in \mathcal{L}_{(9,+\infty)}$. Tudíž $e^{-x^2} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$.

3/ Lze také postupovat takto /což není nic jiného, než důkaz vět ze cvičení 3,25 /:

existuje takové x_0 , že $0 \le e^{-x^2} \le \frac{1}{x^2}$ pro $x > x_0$.

Proč?

Naše nerovnost je ekvivalentní nerovnosti

$$0 \le e^{-x^2} \cdot x^2 \le 1 \qquad \text{pro } x > x_0 \,,$$

která vyplývá ze vztahu $\lim_{x\to+\infty} e^{-x^2} \cdot x^2 = 0$ a z definice limity.

Protože $\int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ je konečný pro $x_0 > 0$, je konečný i integrál $\int_{x_0}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$. Lehko ukážeme, že $e^{-x^2} \in \mathcal{L}_{(0,x_0)}$.

$$\int_0^\infty x^{s-1} (\log x)^k e^{-x} \, dx$$

probl. body: 0
1
∞

"0" e^{-x} - OK

tedy srovnáme s $g(x) = x^{s-1} (\log x)^k$

$$\lim_{x \to 0+} \frac{f}{g} = \lim \frac{x^{s-1} \ln^k x}{x^{s-1} \ln^k x} \cdot e^{-x} \overset{VOAL}{=} 1 \in (0,1)$$

$$\int_0^{1/e} f \; k \iff \int_0^{1/e} x^{s-1} (\log x)^k \; k \iff \boxed{\begin{array}{l}(s-1>-1, \; k \in \mathbb{R}) \\ \vee \; (s-1=-1, \; k<-1)\end{array}}$$

"1" x^{s-1} OK, e^{-x} OK

$\ln x \approx x-1$

$g(x) = (x-1)^k$

$$\lim_{x \to 1\pm} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim x^{s-1} e^{-x} \cdot \frac{(\ln x)^k}{(x-1)^k} \overset{VOAL}{=} 1 \cdot \frac{1}{e} \cdot 1 \in (0,\infty)$$

$$\int_{1/2}^{1} f(x) \, dx \; k \iff \int_{1/2}^{1} (x-1)^k \, dx$$

$$\int_{1/2}^{1} (x-1)^k \, dx = \int_0^{1/2} y^k \, dy = \begin{cases} \left[\frac{y^{k+1}}{k+1} \right]_0^{1/2} \\ \left[\ln|y| \right]_0^{1/2} & k=-1 \end{cases}$$

$y = -x+1$
$dy = -dx$

$$\boxed{\begin{array}{l} k>-1 \quad k \\ k \leq -1 \quad D \end{array}}$$

$\int_1^3 f(x)\,dx$ k $\iff$ $\int_1^3 |x-1|^k\,dx$ k $\iff$ $\boxed{k > -1}$

$$\int_1^3 (x-1)^k dx = \int_0^2 y^k\, dy$$

$y = x-1$

$dy = dx$

"∞" e^{-x} přebije tu $\ln^k x$ i to x^{s-1}

máme konvergenci $\int_1^\infty x^{a} e^{bx}$

$$g(x) = x^{s-1}\ x^k\ e^{-x}$$

pak $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{s-1}\ \ln^k x\ e^{-x}}{x^{s-1}\ x^k\ e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{\ln x}{x}\right)^k$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} \overset{L'H}{\underset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

tedy $\int_1^\infty g$ k $\Rightarrow$ $\int_1^\infty f$ k

ale $\int_1^\infty g$ k ✓

Závěr: $s > 0$ $k \in \mathbb{R}$ & $k > -1$

nebo $s = 0$ $k < -1$ & $k > -1$

tedy $s > 0$ $k > -1$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x^2}{\sqrt{1+x^3}}\, dx$$

probl. body "0", "∞"

0: $\sqrt{1+x^3} \approx 1$

$\sin x^2 \approx x^2$

$g(x) = x^2$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin x^2}{x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} = 1 \in (0,\infty)$$

$$\int_0^2 f \ k \iff \int_0^2 x^2 \ k \ \checkmark$$

"∞"

$|\sin x^2| \le 1$

$$\int_2^\infty \frac{|\sin x^2|}{\sqrt{1+x^3}}\, dx \le \int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\, dx$$

$g(x) = 1/x^{3/2}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}}{\frac{1}{\sqrt{x^3}}} = \lim \sqrt{\frac{x^3}{1+x^3}} = 1 \in (0,\infty)$$

$$\frac{x^3}{1+x^3} \to \frac{1}{1+0}$$

$$\int_2^\infty f \ k \iff \int_2^\infty x^{-\frac{3}{2}} \ k$$

$-\frac{3}{2} < -1$ ✓

Závěr $\int_0^\infty \frac{\sin x^2}{\sqrt{1+x^3}} \ k$

$$\int_0^{\pi/2} (\operatorname{tg} x)^\alpha \, dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^\alpha x}{\cos^\alpha x} \, dx$$

p.b: $0, \frac{\pi}{2}$

"0" problém má $\sin x \approx x$, $\cos x \approx 1$ $\quad g(x) = x^\alpha$

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\frac{\sin^\alpha x}{\cos^\alpha x}}{x^\alpha} = 1 \in (0, \infty)$$

tedy $\int_0^{\pi/4} f$ k $\Leftrightarrow \int_0^{\pi/4} x^\alpha$ k $\quad \alpha > -1$

"$\frac{\pi}{2}$" $\quad \sin x \approx 1$

$\cos x \approx \frac{\pi}{2} - x$

$$g(x) = \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^\alpha}$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} \frac{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^{1}}{\cos x} \overset{L'H}{=} \lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} \frac{-1}{-\sin x} = 1$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} \frac{\frac{\sin^\alpha x}{\cos^\alpha x}}{\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^\alpha}} = \lim \underbrace{\sin^\alpha x}_{\Downarrow \, 1} \cdot \lim \underbrace{\frac{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^\alpha}{\cos^\alpha x}}_{\Downarrow \, 1} = 1 \in (0, \infty)$$

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} f \text{ k} \Leftrightarrow \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(\frac{\pi}{2} - x\right)^{-\alpha} dx$$

$$\int_0^{\pi/4} y^{-\alpha} \, dy \text{ k} \Leftrightarrow -\alpha > -1$$

$y = \left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$dy = -dx$

Závěr: $\int f$ k $\Leftrightarrow -\alpha > -1$

$1 > \alpha$

$$\int_0^1 \frac{\sin x^p}{x^q}\,dx$$

problém pouze u „0"

- $q<1$: $\frac{|\sin x^p|}{x^q} \leq \frac{1}{x^q}$

  tedy ze srovnávacího kritéria $\int_0^1 f$ K

- $q \geq 1$ srovnáme s $g(x) = \frac{x^p}{x^q}$
- $p>0$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{\sin x^p}{x^q}}{\frac{x^p}{x^q}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\sin x^p}{x^p} = 1$$

$$\int_0^1 f \text{ K} \iff \int_0^1 x^{p-q} \text{ K} \iff p-q>-1$$

- $p=0$ $f(x) = \frac{\sin 1}{x^q}$

$$\int_0^1 f \text{ K} \iff \int_0^1 \frac{1}{x^q} \text{ K} \qquad -q>-1$$

- $p \lneq 0$ $\qquad y = x^p \qquad y^{1/p} = x$

$$dy = p x^{p-1}\,dx \qquad \frac{1}{p} y^{\frac{1}{p}-1}\,dy = dx$$

$$\int_\infty^1 \frac{\sin y}{y^{\frac{q}{p}}} \frac{1}{p} y^{\frac{1}{p}-1}\,dy = \left|\frac{1}{p}\right| \int_1^\infty \frac{\sin y}{y^{\frac{q}{p}-\frac{1}{p}+1}}\,dy$$

$$\frac{q-1}{p}+1 < 2 \qquad \left|\frac{q-1}{p}<1\right.$$

závěr: $(q<1 \quad p\in\mathbb{R}) \vee (q\geq 1, p>0 \quad p-q>-1) \vee \left(p<0, \begin{array}{l} q\geq 1 \\ \frac{q-1}{p}<1 \end{array}\right)$