$$\int_1^3 \frac{dx}{(3-x)^\alpha}$$

? substituce $y = 3 - x \qquad dy = -dx$

x	1	3
y	2	0

$$= +\int_0^2 \frac{dx}{y^\alpha} \qquad k \iff -\alpha > -1$$

$$\alpha < 1$$

Pro $\alpha < -1$ tedy integrál $\int\limits_1^\infty x^\alpha \mathrm{d}x$ konverguje a jeho hodnota je $\frac{1}{\alpha+1}$.

2.

$$\int\limits_0^\infty e^{\alpha x}\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}\right]_0^\infty = \frac{1}{\alpha}\cdot\left(1 - \lim_{A\to\infty} e^{\alpha A}\right). \tag{4.5}$$

3 Tato limita existuje pro $\alpha < 0$ a neexistuje pro $\alpha \geq 0$. Dostáváme tedy:

$$\int\limits_0^\infty e^{\alpha x}\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} & \text{pro } \alpha < 0, \\ \text{diverguje} & \text{pro } \alpha \geq 0. \end{cases} \tag{4.6}$$

3. Integrál $\int\limits_e^\infty \frac{(\ln x)^\alpha}{x}\mathrm{d}x$ budeme řešit pomocí substituce $\ln x = t$:

$$\int\limits_e^\infty \frac{(\ln x)^\alpha}{x}\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} \ln x & = & t \\ \frac{1}{x}\mathrm{d}x & = & \mathrm{d}t \\ \ln e & = & 1 \\ \ln\infty & = & \infty \end{vmatrix} = \int\limits_1^\infty t^\alpha \mathrm{d}t, \tag{4.7}$$

4 což je integrál, který známe z předposledního příkladu. Jeho řešení tedy dále nebudeme rozebírat. Uvedeme zde pouze výsledek – pro $\alpha < -1$ integrál $\int\limits_e^\infty \frac{(\ln x)^\alpha}{x}\mathrm{d}x$ konverguje a jeho hodnota je rovna $\frac{1}{\alpha+1}$, pro $\alpha \geq -1$ integrál $\int\limits_e^\infty \frac{(\ln x)^\alpha}{x}\mathrm{d}x$ diverguje.

Příklad 4.1.2. Rozhodněte, zda konverguje integrál

5
$$\int\limits_3^\infty \frac{x-1}{x^2+2x}\mathrm{d}x.$$

Řešení. U tohoto integrálu je problém ukryt v horní mezi. Jedná se tedy o základní typ nevlastního integrálu. Máme rozhodnout o konvergenci daného integrálu. Konvergenci zkusíme otestovat pomocí srovnávacího kritéria. Musíme najít nějakou vhodnou testovací funkci, resp. snažíme se najít nějakou funkci tak, abychom získali patřičnou nerovnost. V čitateli i jmenovateli máme polynomy a víme, že když $x \to \infty$, převáží nejvyšší mocniny každého z polynomů. Platí:

$$0 \leq f(x) = \frac{x-1}{x^2+2x} \leq \frac{x}{x^2+2x} \leq \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} = g(x).$$

Nyní můžeme použít srovnávací kritérium. Testovací integrál je

$$\int\limits_3^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

Již víme, že tento integrál diverguje. Bohužel se jedná o situaci, ve které nedokážeme pouze za použití srovnávacího kritéria rozhodnout. Přitom je z tvaru integrálu vidět, že nerovnost mezi funkcemi se snadno převede na následující tvar:

$$\int\limits_3^\infty \frac{x-1}{x^2+2x}\mathrm{d}x \leq \int\limits_3^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x} = \infty.$$

Tato nerovnost je ovšem splněna bez ohledu na to, zda zadaný integrál konverguje nebo diverguje. Srovnávací kritérium tedy selhalo.

Druhou možností je limitní srovnávací kritérium. Víme, že pro velká x platí:

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2+2x} \sim \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} = g(x).$$

Tento intuitivní odhad je ovšem potřeba korektně ověřit:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x^2+2x}\frac{x}{1}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-x}{x^2+2x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-1/x}{1+2/x}\right) = 1 \neq 0.$$

V okolí problematického bodu se tedy obě funkce chovají stejně a protože testovací integrál diverguje, musí divergovat i integrál

$$\int_3^\infty \frac{x-1}{x^2+2x}\mathrm{d}x.$$

Příklad 4.1.3. Vypočítejte (pokud konverguje) integrál

6

$$\int_1^\infty \frac{x+5}{x^3+3x^2-1}\mathrm{d}x.$$

Řešení. Nejdříve rozhodneme o konvergenci, či divergenci daného integrálu. Snadno odhadneme, že když poroste x do nekonečna, převáží ve zlomku nejvyšší mocniny a po jejich zkrácení dostaneme funkci $1/x^2$ o které víme, že $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ konverguje. Odhadneme tedy, že integrál bude konvergovat. Nyní zkusíme tento předpoklad korektně ověřit.
Srovnávací kritérium není použitelné, protože pro srovnávací funkci $1/x^2$, která se sama nabízí, neplatí nerovnost

$$\frac{x+5}{x^3+3x^2-1} \leq \frac{1}{x^2},$$

protože například v bodě $x = 1$ dostaneme $\frac{6}{3} \leq 1$, což není pravda. Zbývá nám tedy limitní srovnávací kritérium s naším odhadem:

$$f(x) = \frac{x+5}{x^3+3x^2-1} \sim \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2} = g(x).$$

Tento odhad snadno ověříme:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x^3+3x^2-1}\frac{x^2}{1}\right) =$$
$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+5x^2}{x^3+3x^2-1}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+5/x}{1+3/x-1/x^3}\right) = 1 \neq 0 \quad (4.8)$$

Podmínka limitního srovnávacího kritéria je tedy splněna a protože víme, že testovací integrál $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ konverguje, musí podle limitního srovnávacího kritéria konvergovat i zadaný integrál.

Příklad 4.1.4. Pomocí srovnávacího nebo limitního srovnávacího kritéria rozhodněte, zda následující integrály konvergují nebo divergují:

1. $\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^3+1}$ 2. $\int_0^\infty \frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x$ 3. $\int_1^\infty \frac{3x^3+x^2+5x+2}{2x^5+x^2+1}\mathrm{d}x$ 4. $\int_2^\infty \frac{(x-2)^2}{2x^{5/2}+x^2+3}\mathrm{d}x$

$$\int_0^\infty \frac{x}{x^3+1}\,dx$$

- 0 – lze spojitě rozšířit

- ∞ $\qquad g(x) = \frac{x}{x^3}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{x^3+1}}{\frac{x}{x^3}} = \lim \frac{x^3}{x^3+1} = 1 \in (0, \infty)$$

$$\int_2^\infty f \quad k \iff \int_2^\infty \frac{1}{x^2} \ k \ \checkmark$$

na $[0, 2]$ fce spoj. na om. intervalu

Závěr: $\int_0^\infty \frac{x}{x^3+1}\,dx$ k

35.6

$$\int_0^\infty \frac{x^p}{1+x^q}\,dx$$

probl. body: $0,\ \infty$

"0"

$\boxed{q \geq 0}$ $\quad 1$ je "silnější" než x^q

$g(x) = x^p$

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\frac{x^p}{1+x^q}}{x^p} = \lim \frac{1}{1+x^q} = \begin{cases} 1 & q > 0 \\ \frac{1}{2} & q = 0 \end{cases}$$

$$\int_0^2 f(x) \ k \iff p > -1$$

$\boxed{q < 0}$ $\quad x^q$ "silnější" než 1

$g(x) = \frac{x^p}{x^q}$

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\frac{x^p}{1+x^q}}{\frac{x^p}{x^q}} = \lim \frac{x^q}{x^q+1} = \lim \frac{1}{1+x^{-q}}$$

$$= 1 \qquad \int_0^2 f(x) \ k \iff \boxed{p-q > -1}$$

"∞"

$\boxed{q \geq 0}$ $\quad x^q$ vede nad 1

$g(x) = \frac{x^p}{x^q}$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^p}{1+x^q}}{\frac{x^p}{x^q}} = \lim \frac{x^q}{1+x^q} = \begin{cases} 1 & q > 0 \\ 1/2 & q = 0 \end{cases}$$

$$\int_2^\infty f(x) \quad k \quad \Leftrightarrow \quad p \cancel{q} - q < -1$$

$\boxed{q < 0}$ 1 vede nad x^q

$$g(x) = x^p$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^p}{1+x^q}}{x^p} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+x^q} = 1$$

$$\int_2^\infty f(x) \quad k \quad \Leftrightarrow \quad p < -1$$

Závěr

$$\int_0^\infty f(x) \quad k \quad \Leftrightarrow \quad q \geq 0 \;\&\; p > -1 \;\&\; p-q < -1$$

nebo $\quad q < 0 \;\&\; p-q > -1 \;\&\; p < -1$

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

probl. body: "0", "1"

0: $(1-x)^{q-1} \approx 1$

$x^{p-1} \approx x^{p-1}$

$$g(x) = x^{p-1}$$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{x^{p-1}} = \lim (1-x)^{q-1} = 1$$

$$\int_0^{1/2} f \quad K \iff p-1 > -1 \qquad \boxed{p>0}$$

1: $x^{p-1} \approx 1$

$$g(x) = (1-x)^{q-1}$$

$$\lim_{x\to 1-} \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{(1-x)^{q-1}} = \lim_{x\to 1-} x^{p-1} = 1$$

$$\int_{1/2}^{1} f \quad k \iff \int_{1/2}^{1} (1-x)^{q-1}\,dx$$

$y = 1-x \qquad dy = -dx \qquad \int_0^{1/2} y^{q-1}\,dy \quad k \iff$

x	$1/2$	1
y	$1/2$	0

$q-1 > -1$

$\boxed{q>0}$

Závěr: $\int_0^1 f(x) \quad k \iff \boxed{q, p > 0}$

$$\int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x}\, dx$$

v 1 spojité,
probl. bod: ∞

v ∞ vede e^{-x}

$g(x) = e^{-x}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{e^{-x}}{x}}{e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$ Nevíme nic!
Ale ano: $\int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x}$ K

$\frac{e^{-x}}{x} \leq e^{-x}$ tedy ze sr. kritéria:

$$\int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x}\, dx \quad K$$

$$\int_0^{\pi} \frac{1-\cos(ax)}{x^p}\,dx \qquad a,p \in \mathbb{R}$$

- $\boxed{a=0}$ pak $f=0 \Rightarrow \int f$ k
- $a \neq 0$

  probl. bod: 0 proč ne π?

  $$g(x) = x^{2-p}$$

  $$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1-\cos ax}{x^p}}{x^{2-p}} = \lim \frac{1-\cos ax}{a^2x^2}\cdot a^2 = \frac{a}{2} \in (0,\infty)$$

  $$\int_0^{\pi} f(x)\,dx \text{ k} \Leftrightarrow \int_0^{\pi} \frac{dx}{x^{p-2}} \text{ k} \Leftrightarrow p-2<1 \Rightarrow \boxed{p<3}$$

$$\int_0^\infty e^{-\sqrt{x}}\,dx$$

pr. body ∞

0 ? $\lim_{x\to 0+} e^{-\sqrt{x}} = 1$ tedy lze spojitě rozšířit

∞: $\nexists$ mocnina taková, aby $e^{-\sqrt{x}} \approx x^\alpha$ v ∞.

každopádně nevadí, když $\frac{1}{x^2}$

$g(x) = \frac{1}{x^2}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{\sqrt{x}}} = 0$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx \ \text{k} \Rightarrow \int_1^\infty e^{-\sqrt{x}}\,dx \ \text{k}$$

na $(0,1]$ je f spojitá, omezená $\Rightarrow \int_0^1 f$ k

celkem $\int_0^\infty e^{-\sqrt{x}}\,dx$ k.

$$\int_0^\infty (\pi - 2\operatorname{arctg} x)^\alpha \, dx \qquad \alpha \in \mathbb{R} \text{ ?}$$

<u>TISK TABULKY</u>

Problem. body: "∞" $\forall$

"0" ? jak to u "0" vypadá?

$$\lim_{x \to 0+} (\pi - 2\operatorname{arctg} x)^\alpha \overset{\text{VOLSF}}{=} \pi^\alpha \in (0, \infty) \quad \forall \alpha$$

→ tedy ok, funkce je tam "spojitá"

→ <u>nejde</u> do 0 !

tedy "∞"

cíl: najít x^β tak, aby $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^\beta} \in (0, \infty)$

tip $\beta = -1 \cdot \alpha$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(\pi - 2\operatorname{arctg} x)^\alpha}{\frac{1}{x^\alpha}} \overset{\text{VOLSF}}{=} 2^\alpha \in (0, \infty) \; \forall \alpha$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi - 2\operatorname{arctg} x}{\frac{1}{x}} \overset{\text{l'H}}{\underset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=}} \lim \frac{-2 \cdot \frac{1}{1+x^2}}{-1 \cdot \frac{1}{x^2}} = 2$$

$$\int_{1}^{\infty} f \text{ k} \iff \int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} \text{ k}$$

$$-\alpha < -1 \qquad \boxed{\alpha > 1}$$

na $[0, 1]$ je f spoj → KONV.

Pro $a = -1$ je

$$\int \frac{1}{x}\, dx \overset{C}{=} \ln x$$

primitivní funkcí k funkci $\frac{1}{x}$ na $(1, +\infty)$, a tedy také zobecněnou primitivní funkcí. Odtud je zřejmé, že pro $a = -1$ integrál diverguje (neboť limita zobecněné primitivní funkce v nekonečnu existuje, ale není konečná).

Závěr: Konverguje (absolutně) pro $a < -1$.

3. $\displaystyle\int_0^\infty e^{ax}\, \mathrm{d}x$ kde $a \in \mathbb{R}$

   Řešení: diplomka 4.1.1

4. $\displaystyle\int_e^\infty \frac{\ln^a x}{x}\, \mathrm{d}x,\ a \in \mathbb{R}$

   Řešení: diplomka 4.1.1

5. $\displaystyle\int_3^\infty \frac{x-1}{x^2+2x}\, \mathrm{d}x$

   Řešení: diplomka 4.1.2

6. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x+5}{x^3+3x^2-1}\, \mathrm{d}x$

   Řešení: diplomka 4.1.3

7. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{x^3+1}\, \mathrm{d}x$

   Řešení: Konverguje - u 0 je funkce spojitá, u ∞ srovnáme s $1/x^2$.

8. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x}\, \mathrm{d}x$

   Řešení: Konverguje - na intervalu $[0, 1]$ je funkce spojitá, na intervalu $[1, \infty)$ srovnáme s funkcí e^{-x}.

9. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arcctg}^a x}{x^b}\, dx$

   Řešení:

   Integrand f je nezáporná funkce, stačí tedy vyšetřovat absolutní konvergenci. K tomu použijeme limitní srovnávací kritérium a rozklad

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arcctg}^a x}{x^b}\, dx = \int_0^1 \frac{\operatorname{arcctg}^a x}{x^b}\, dx + \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arcctg}^a x}{x^b}\, dx$$

   Má-li totiž (absolutně) konvergovat integrál vpravo, pak také konvergují (absolutně) oba integrály vlevo (integrujeme přes menší množinu). Naopak, pokud (absolutně) konvergují integrály vpravo, pak také konverguje (absolutně) integrál vlevo (existencí integrálů je zaručena existence zobecněné primitivní funkce na celém intervalu i konečnost integrálu).[2]

Vyšetřujme nyní (absolutní) konvergenci integrálu

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arcctg}{}^a x}{x^b}\, dx$$

Funkce $\frac{\operatorname{arcctg}{}^a x}{x^b}$ je spojitá a nezáporná na $(0,1]$, a protože

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{\operatorname{arcctg}{}^a x}{x^b}}{\frac{1}{x^b}} = \lim_{x\to 0+} \operatorname{arcctg}{}^a x = (\pi/2)^a$$

je (absolutní) konvergence vyšetřovaného integrálu ekvivalentní (absolutní) konvergenci integrálu

$$\int_0^1 \frac{1}{x^b}\, dx$$

Přímým výpočtem se přesvědčíme, že tento integrál konverguje pro $b < 1$.

Vyšetřujme nyní (absolutní) konvergenci integrálu

$$\int_1^\infty \frac{\operatorname{arcctg}{}^a x}{x^b}\, dx$$

Funkce $\frac{\operatorname{arcctg}{}^a x}{x^b}$ je spojitá a nezáporná na $[1,+\infty)$, a protože

$$\lim_{x\to+\infty} x \operatorname{arcctg} x = 1,$$

platí také, že

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\operatorname{arcctg}{}^a x}{x^b}}{\frac{1}{x^{a+b}}} = \lim_{x\to 0+} x^a \operatorname{arcctg}{}^a x = 1,$$

a tudíž je (absolutní) konvergence vyšetřovaného integrálu ekvivalentní (absolutní) konvergenci integrálu

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{a+b}}\, dx$$

Přímým výpočtem se přesvědčíme, že tento integrál konverguje pro $a + b > 1$ a diverguje jinak.

Závěr: Integrál konverguje (absolutně), pokud $1 > b > 1 - a$. Jinak diverguje.

10. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \arctan \frac{x}{x^2+1} \ln^a x\, dx$

Řešení:

[2]) Tento krok v následujících příkladech již nebudeme komentovat

Integrand je nezáporný, stačí vyšetřovat absolutní konvergenci.

Na pravém okolí jedničky je

$$\arctan \frac{x}{x^2+1} \approx \frac{1}{2}, \qquad \ln x = \ln(1 + (x-1)) \approx (x-1)$$

(jak dostaneme použitím Taylorova rozvoje logaritmu v nule). Odtud plyne, že konvergence integrálu

$$\int_1^2 f(x)\,dx$$

je podle limitního srovnávacího kritéria ekvivalentní konvergenci integrálu

$$\int_1^2 (x-1)^a\,dx$$

a použitím substituce $y = x - 1$ dostaneme, že tento je ekvivalentní integrálu

$$\int_0^1 y^a\,dy$$

Poslední integrál konverguje, a to absolutně, pro $a > -1$.

Naopak na okolí nekonečna je

$$\boxed{\arctan \frac{x}{x^2+1} \approx \frac{1}{x}}$$

a podle limitního srovnávacího kritéria je konvergence integrálu

$$\int_2^{+\infty} f(x)\,dx$$

ekvivalentní konvergenci integrálu

$$\int_2^{+\infty} \frac{\ln^a x}{x}\,dx$$

U tohoto integrálu ale umíme přímo určit primitivní funkci. Na intervalu $(2, +\infty)$ platí, že

$$\int \frac{\ln^a x}{x}\,dx = \int y^a\,dy = \frac{y^{a+1}}{a+1} + C = \frac{\ln^{a+1} x}{a+1} + C$$

pro $a \neq -1$. Odtud přímo vyplývá, že integrál konverguje pro $a + 1 < 0$, tedy pro $a < -1$.

Hodnotu $a = -1$ lze také vyloučit přímým výpočtem, ale vzhledem k podmínce u jedničky to není nutné.

11. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^4}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Integrál konverguje absolutně, neb $\frac{|\sin x|}{x^4} \leq \frac{1}{x^4}$.