

1. cvičení

<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/>
kytaristka@gmail.com

Teorie

Věta 1 (srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu). Necht' $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$ a necht' $a < b$. Necht' funkce $f, g : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ splňují $0 \leq f(x) \leq g(x)$, $x \in [a, b)$. Necht' dále je f spojitá na $[a, b)$ a platí $g \in \mathcal{N}(a, b)$. Potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$.

Věta 2 (limitní srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu). Necht' $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$ a necht' $a < b$. Necht' f, g jsou spojitě nezáporné funkce na $[a, b)$. Jestliže $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} \in (0, \infty)$, pak $f \in \mathcal{N}(a, b)$ právě tehdy, když $g \in \mathcal{N}(a, b)$.

- $\int_0^1 x^a dx$, kde $a \in \mathbb{R}$. KA $\Leftrightarrow a > -1$.
- $\int_1^{+\infty} x^a dx$, kde $a \in \mathbb{R}$ KA $\Leftrightarrow a < -1$.
- $\int_0^{1/e} x^a \ln^b x dx$, $a, b \in \mathbb{R}$. KA $\Leftrightarrow (a > -1, b \in \mathbb{R}$ nebo $a = -1, b < -1)$
- $\int_e^{+\infty} x^a \ln^b x dx$, $a, b \in \mathbb{R}$. KA $\Leftrightarrow (a < -1, b \in \mathbb{R}$ nebo $a = -1, b < -1)$
- $\int_0^{+\infty} x^a e^{bx} dx$ KA $\Leftrightarrow a \in \mathbb{R}$ a $b < 0$
- $\int_1^{+\infty} x^a e^{bx} dx$ KA $\Leftrightarrow a \in \mathbb{R}$ a $b < 0$ nebo $b = 0$ a $a < -1$.
- $\int_0^1 \frac{\sin x}{x^a} dx$, $a \in \mathbb{R}$, KA $\Leftrightarrow a < 2$.
- $\int_0^1 \frac{\cos x}{x^a} dx$, $a \in \mathbb{R}$. KA $\Leftrightarrow a < 1$.
- $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^a} dx$ KA $\Leftrightarrow a > 1$,
- $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^a} dx$, kde $a \in \mathbb{R}$. KA $\Leftrightarrow a > 1$,

Příklady

Vyšetřete absolutní konvergenci integrálů:

1. $\int_1^3 \frac{dx}{(3-x)^\alpha}$

2. $\int_3^\infty \frac{x-1}{x^2+2x} dx$

3. $\int_0^\infty \frac{x}{x^3+1} dx$

4. $\int_0^\infty \frac{x^p}{1+x^q} dx$

5. $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx$

6. $\int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x} dx$

7. $\int_0^\pi \frac{1-\cos(ax)}{x^p} dx$

8. $\int_0^\infty e^{-\sqrt{x}} dx$

9. $\int_0^\infty (\pi - 2\arctan x)^\alpha dx$

10. $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arccotg}^a x}{x^b} dx$

11. $\int_1^{+\infty} \arctan \frac{x}{x^2+1} \ln^a x dx$

12. $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^4} dx$