28. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Příklady

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(\operatorname{arccotg}^{\alpha} x^{\beta})\, dx$

   Řešení:

   Na okolí nuly má integrand spojité rozšíření, neboť

   $$\lim_{x\to 0} \operatorname{arccotg} x = \operatorname{arccotg} 0 = \frac{\pi}{2} \implies \lim_{x\to 0} \operatorname{arccotg}^{\alpha} x^{\beta} = (\operatorname{arccotg} 0)^{\alpha} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\alpha}$$

   a funkce sinus je ve všech bodech spojitá.

   Na okolí nekonečna platí, že integrand nemění znaménko a

   $$\operatorname{arccotg} x \approx \frac{1}{x} \implies \operatorname{arccotg} x^{\beta} \frac{1}{x^{\beta}} \implies \operatorname{arccotg}^{\alpha} x^{\beta} \approx \frac{1}{x^{\alpha\beta}} \implies \sin(\operatorname{arccotg}^{\alpha} x^{\beta}) \approx \frac{1}{x^{\alpha\beta}}$$

   odkud podle limitního srovnávacího kritéria vyplývá, že integrál konverguje tehdy a jen tehdy, pokud $\alpha\beta > 1$ a to navíc absolutně. Jinak diverguje.

2. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x^a \left(\frac{1}{2}\pi - x\right)^b \operatorname{tg}^c x\, dx$

   Řešení:

   Na (dostatečně malém pravém prstencovém) okolí nuly platí, že integrand nemění znaménko a že

   $$\operatorname{tg} x \approx x \implies f(x) \approx \left(\frac{\pi}{2}\right)^b \cdot x^{a+c},$$

   tudíž dostáváme podmínku na konvergenci $a + c > -1$.

   Na (dostatečně malém levém prstencovém) okolí $\pi/2$ platí, že integrand nemění znaménko a že

   $$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \approx \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sin(\pi/2 - x)} \approx \frac{1}{\frac{\pi}{2} - x}$$

   a tedy

   $$f(x) \approx \left(\frac{\pi}{2} - x\right)^{b-c}$$

   Substitucí $y = \frac{\pi}{2} - x$ dostaneme, že konvergence vyšetřovaného integrálu na "malém" levém okolí $\pi/2$ je ekvivalentní konvergenci $\int_0^{\delta} y^{b-c}\, dy$ pro nějaké "malé" δ, odkud máme podmínku $b - c > -1$.

   Závěr: protože integrand je spojitý na $[\delta, 1-\delta]$ pro každé $\delta > 0$ a na vhodných jednostranných okolích nuly $(0, \delta]$ a jedničky $[1-\delta, 1)$ nemění znaménko, víme z předchozího (pomocí limitního srovnávacího kritéria), že konverguje za podmínky $-1 - a < c < b + 1$, a to navíc absolutně. Jinak diverguje.

3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a} \ln\frac{x^2-1}{x^2+1} \operatorname{arctan}\frac{x}{x^3-1}\,dx$

Řešení:

U jedničky použijeme srovnání

$$\ln\frac{x^2-1}{x^2+1} = \ln\frac{(x-1)(x+1)}{x^2+1} \approx \ln(x-1)$$

$$\frac{1}{x^a} \approx 1, \qquad \operatorname{arctan}\frac{x}{x^3-1} \approx \frac{\pi}{2}$$

Tudíž na okolí jedničky se integrand chová obdobně, jako $\ln y$ na pravém okolí nuly; přitom platí, že $\int_0^1 \ln y\,dy$ je absolutně konvergentní (lze ověřit přímým výpočtem integrací per partes).

Na okolí nekonečna platí, že

$$\ln\frac{x^2-1}{x^2+1} = \ln\left(1-\frac{2}{x^2+1}\right) \approx -\frac{2}{x^2+1} \approx -\frac{2}{x^2}$$

$$\operatorname{arctan}\frac{x}{x^3-1} \approx \operatorname{arctan}\frac{1}{x^2} \approx \frac{1}{x^2}$$

odkud vyplývá, že na okolí nekonečna se integrand chová přibližně jako funkce $\frac{1}{x^{a+4}}$. Protože na vhodném okolí nekonečna nemění znaménko, stačí vyšetřovat jeho absolutní konvergenci. Z výše uvedeného srovnání použitím limitní verze srovnávacího kritéria dostanene, že integrál konverguje pro $a+4>1$, tedy pro $a>3$.

4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(e^{2x}+e^x+1)}{x^a} \sin x\,dx$

Řešení:

U nuly použijte odhady

$$\ln(e^{2x}+e^x+1) \approx \ln 3, \qquad \sin x \approx x \implies f(x) \approx x^{1-a}$$

navíc na dosti malém pravém okolí nuly integrand nemění znaménko, takže podle limitního srovnávacího kritéria máme podmínku na konvergenci i absolutní konvergenci $1-a>-1$, tudíž $a<2$.

U nekonečna použijte odhady

$$\ln(e^{2x}+e^x+1) \approx 2x \implies f(x) \approx \frac{2\sin x}{x^{a-1}}$$

z čehož pro absolutní konvergenci máme podle limitního srovnávacího kritéria (srovnáváme integrand s $2|\sin x|/x^{a-1}$) podmínku $a-1>1$, tudíž $a>2$, čímž je absolutní konvergence vzhledem k výše uvedené podmínce u nuly vyloučena.

Pro neabsolutní konvergenci máme podle Dirichletova kritéria podmínku $a-1>0$, tedy $a>1$. Člen $\ln(e^{2x}+e^x+1)/2x$ se přilepí pomocí Abelova kritéria, neboť z tvaru

$$\frac{\ln(e^{2x}+e^x+1)}{2x} = 1 + \frac{\ln(1+e^{-x}+e^{-2x})}{2x}$$

je patrné, že jde o monotónní funkci na nějakém okolí nekonečna.

Závěr: Integrál konverguje pouze neabsolutně pro $1<a<2$. Absolutně nekonverguje pro žádné $a\in\mathbb{R}$.

5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan^{\alpha} x}{\ln^{\beta}(1+x)} \sin x \, dx$

Řešení:

U nuly použijeme odhady

$$\arctan x \approx x, \quad \ln(1+x)\approx x, \quad \sin x \approx x$$

stačí tedy vyšetřovat integrál

$$\int_0^{\delta} x^{\alpha+1-\beta}\, dx$$

který konverguje (absolutně) pro $\alpha>\beta-2$.

U nekonečna nenastává absolutní konvergence nikdy, neboť $\ln^{\beta}(1+x)\le\sqrt{x}$ pro nějaké $x>x_{\beta}$ reálné a srovnávací kritérium aplikované na $|\sin x|/\sqrt{x}$ dává divergenci.

Neabsolutní konvergence u nekonečna nastává pro každé $\alpha\in\mathbb{R}$ a $\beta>0$ podle Dirichletova kritéria pro $\sin x/\ln^{\beta}(1+x)$ a tudíž podle Abelova kritéria pro vyšetřovaný integrál.

Závěr: integrál konverguje neabsolutně pro $\beta>0$ a $\alpha>\beta-2$. Absolutně nikdy.

6. $\displaystyle\int_0^{1} \arccos^{a}(\sqrt{1-x^4}) \cos\frac{1}{\sqrt{1-x}}\, dx$

Řešení:

Uvědomme si nejprve, že je

$$\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$$

a podle l'Hopitalova pravidla platí, že

$$\lim_{y\to 1-}\frac{\arccos y}{\sqrt{1-y^2}} = \lim_{y\to 1-}\frac{-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}}{-\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}} = 1$$

Odtud plyne, že na dostatečně malém pravém prstencovém okolí nuly je integrand nezáporný a jeho první člen se chová přibližně jako

$$\arccos^a(\sqrt{1-x^4}) \approx \left(\sqrt{1-(1-x^4)}\right)^a = x^{2a}$$

odkud pomocí limitního srovnávacího kritéria plyne, že integrál může konvergovat pouze pro $2a > -1$.

Uvědomme si dále, že na intervalu $(\delta, 1)$ pro $\delta > 0$ je integrand spojitá a omezená funkce, a tudíž $\int_\delta^1 f(x)\,dx$ konverguje absolutně.

Závěr: integrál konverguje pro $a > -1/2$ a to navíc absolutně. Jinak diverguje.

7. $\displaystyle\int_{1/2}^{+\infty} \frac{\cos \pi x}{\ln^\alpha 2x}\,dx$

Řešení:

Srovnáním s funkcí $|\cos(\pi x)|/x$ na okolí nekonečna dostaneme, že absolutně integrál nekonverguje pro žádné $\alpha > 0$.

Neabsolutně konverguje na $[1, +\infty)$ podle Dirichletova kritéria, neboť $\cos(\pi x)$ má omezenou primitivní funkci $|\frac{1}{\pi}\sin(\pi x)| \leq 1$ a $\ln^\alpha 2x \to 0$ monotónně pro každé $\alpha > 0$.

Na okolí $1/2$ použijme odhady

$$\cos(\pi x) = \sin(\pi x - \pi/2) \approx (\pi x - \pi/2) = \pi\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$\ln(2x) = \ln(1 + (2x-1)) \approx (2x-1) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

a tudíž

$$f(x) \approx \frac{\pi}{2^\alpha}\left(x - \frac{1}{2}\right)^{1-\alpha}$$

odtud máme na absolutní i neabsolutní konvergenci (neboť integrand na $(1/2, 1]$ nemění znaménko) podmínku podle limitního srovnávacího kritéria, že $1-\alpha > -1$, tudíž $\alpha < 2$.

Závěr: integrál konverguje neabsolutně pro $0 < \alpha < 2$.

8. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\exp(\sin x)}{x^\alpha}\sin 2x\,dx$

Řešení:

Protože

$$1/e \leq e^{\sin x} \leq e, \qquad \text{pro každé } x \in \mathbb{R}$$

a na okolí nuly je

$$\sin 2x \approx 2x$$

stačí na okolí nuly vyšetřovat integrál

$$\int_0^\delta x^{1-\alpha}\, dx$$

který konverguje pro každé $\alpha < 2$.

Podle limitního srovnávacího kritéria konverguje integrál na okolí nekonečna (vzhledem k odhadům na $e^{\sin x}$) absolutně pro $\alpha > 1$ (srovnáním s $e|\sin 2x|/x^\alpha$).

Integrál na okolí nekonečna konverguje neabsolutně pro $\alpha > 0$. Nahlédneme to podle Dirichletova kritéria, pokud dokážeme, že $e^{\sin x}\sin 2x$ má omezenou primitivní funkci na $(0, +\infty)$. Lze ale přímo počítat (substitucí $t = \sin x$ a per partes)

$$\int e^{\sin x} \cdot 2\sin x \cos x\, dx = \int ue^u\, du = ue^u - e^u = C + \sin x e^{\sin x} - e^{\sin x}$$

což je evidentně omezená funkce.

POZOR! Protože $e^{\sin x}$ není na žádném okolí nekonečna monotónní, nelze použít "techniku přilepení" podle Abelova kritéria.

9. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^a e^{-(bx+cx^2)}\, dx$

Řešení:

Integrand je nezáporný, stačí vyšetřovat absolutní konvergenci.

Na okolí nuly je $e^{-bx-cx^2} \approx 1$ a tudíž

$$f(x) \approx x^a,$$

odkud podle limitního srovnávacího kritéria vyplývá, že integrand na vhodném pravém okolí nuly, např. $[0, 1]$, konverguje, právě když $a > -1$.

Na okolí nekonečna $[1, +\infty)$ rozlišíme následující případy:

1. $c > 0$. Potom integrál konverguje absolutně podle srovnávacího kritéria srovnáním s integrálem $\int_1^{+\infty} e^{-(c/2)x^2}$. Platí totiž, že

$$\frac{x^a e^{-bx-cx^2}}{e^{-(c/2)x^2}} \xrightarrow{x\to\infty} 0$$

a tudíž pro nějaké $x_a > 0$ musí platit, že pro $x > x_a$ je $x^a e^{-bx-cx^2} \le e^{-(c/2)x^2} \le e^{-(c/2)x}$. Poslední odhad plyne z toho, že pro $x > 1$ je $x^2 > x$ a funkce e^{-y} je klesající v proměnné y. Konvergenci integrálu $\int_1^{+\infty} e^{-(c/2)x}\, dx$ lze snadno ověřit přímým výpočtem.

2. $c < 0$. Integrál diverguje podle srovnávacího kritéria srovnáním $f(x) \ge e^{-(c/2)x^2} \ge e^{-(c/2)x}$.

3. $c = 0$ a $b > 0$. Integrál konverguje srovnáním $x^a e^{-bx} \leq e^{-(b/2)x}$, která platí pro $x > x_b > 1$, kde x_b je reálné číslo (které závisí na hodnotě konstanty b). Odhad se odvodí pomocí limity obdobně jako v bodě 1.

4. $c = 0$ a $b < 0$. Integrál diverguje srovnáním $x^a e^{-bx} \geq e^{-(b/2)x}$.

5. $c = 0$ a $b = 0$. Potom (připomeňme, že jsme na okolí nekonečna) integrál konverguje pro $a < -1$.

Závěr: porovnáním podmínky na okolí nuly ($a > -1$) a podmínek v bodech 1-5 dostaneme, že integrál konverguje pro $a > -1 \wedge c > 0$ nebo pro $a > -1 \wedge b > 0 \wedge c = 0$. Pak konverguje navíc absolutně. Jinak diverguje.

10. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x \sin x}{x \arctan\,(1-x)}\, dx$

Řešení:

U nuly použijte odhady

$$\sin x \approx x, \qquad \arctan\,(1-x) \approx \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

z nichž plyne, že integrand na nějakém dostatečně malém pravém okolí nuly nemění znaménko a lze jej srovnat

$$f(x) \approx \ln x$$

přičemž $\int_0^\delta \ln x\, dx$ konverguje absolutně (ověřte přímým výpočtem).

Na intervalu $(0, +\infty)$ je integrand spojitý.

U nekonečna použijte odhad

$$\arctan\,(1-x) \approx -\frac{\pi}{2}$$

a díky monotonii a omezenosti funkce arctan stačí vyšetřovat (podle Abelova či limitního srovnávacího kritéria) pouze integrál

$$\int_M^{+\infty} \frac{\ln x}{x} \sin x\, dx$$

Absolutní konvergence je vyloučena, použijte odhad

$$\left| \frac{\ln x}{x} \sin x \right| \geq \frac{|\sin x|}{x}$$

platný pro $x > e$ a znalost toho, že "integrál" napravo je divergentní. Neabsolutní konvergenci dává Dirichletovo kritérium, vzhledem k tomu, že $\ln x/x \to 0$ monotónně na nějakém okolí nekonečna (ukažte, že derivace této funkce je záporná pro $x > e$) a funkce $\sin x$ má omezenou primitivní funkci.

Závěr: integrál konverguje (pouze) neabsolutně.

11. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^\alpha}{\arctan^\beta x} \sin\frac{1}{x}\, dx$

Řešení:

U nuly použijeme odhady

$$\sin x^\alpha \approx x^\alpha, \qquad \arctan^\beta x \approx x^\beta$$

stačí tedy vyšetřovat integrál

$$\int_0^\delta x^{\alpha-\beta} \sin\frac{1}{x}\, dx$$

který lze použitím substituce $t = 1/x$ převést na integrál

$$\int_{1/\delta}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{\alpha-\beta+2}}\, dt$$

Ten konverguje absolutně pro $\alpha > \beta - 1$ a neabsolutně pro $\alpha > \beta - 2$.

U nekonečna použijeme odhady

$$\arctan x \approx \pi/2, \qquad \sin(1/x) \approx 1/x$$

a poté substituci $t = x^\alpha$, čímž dostaneme pro konvergenci ekvivalentní integrál

$$\int_M^{+\infty} \frac{\sin t}{t}$$

který konverguje pouze neabsolutně, ale zato pro každé $\alpha > 0$.

Závěr: konverguje neabsolutně pro $\alpha > \beta - 2$.