26. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Příklady

1. Nakreslete otevřenou a uzavřenou kouli $B(0,1)$ v prostoru $\mathbb{R}^2$ s metrikou

   (a) eukleidovskou
   (b) New Yorskou
   (c) supremovou
   (d) diskrétní

2. Určete, zda množina M je uzavřená, otevřená, co je její vnitřek, uzávěr, hranice (v $\mathbb{R}^n$ s eukleidovskou metrikou):

   (a) $M = (0,1)$
   (b) $M = [0,1]$
   (c) $M = (0,1]$
   (d) $M = (0,\infty)$
   (e) $M = [0,\infty)$
   (f) $M = (-\infty,\infty)$

   (g) $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ 1 < x^3 + y^2 + z^3 \leq 2;\ x,y,z \geq 0\}$
   (h) $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ 1 \leq x^3 + y^2 + z^3 \leq 2;\ x,y,z \geq 0\}$
   (i) $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ 1 < x^3 + y^2 + z^3 < 2;\ x,y,z > 0\}$
   (j) $\mathbb{N}$
   (k) $\mathbb{Q}$
   (l) $\mathbb{R}$

3. Určete, zda množina M je omezená

   (a) $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ 2 < xyz < 4\}$

4. Rozhodněte, zda platí:

   (a) $\overline{B(x,r)} = \overline{B}(x,r)$
   (b) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

5. Najděte uzávěry grafů funkcí

   (a)
   $$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x), & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$
   (b) Dirichletova funkce
   (c) Riemannova funkce

6. Nechť ρ_1, ρ_2 jsou metriky na prostoru X. Určete, zda následující funkce definují metriku na X:

   (a) $\rho_1 + \rho_2$
   (b) $\max\{\rho_1, \rho_2\}$
   (c) $\min\{\rho_1, \rho_2\}$
   (d) $\max\{\rho_1, 1\}$
   (e) $\min\{\rho_1, 2\}$

7. Nechť $0 < p \leq q < \infty$. Sestrojte množinu A tak, aby $\operatorname{diam} A = q$, a $\operatorname{diam} A^\circ = p$.

8. Nechť (X_i, ρ_i) jsou metrické prostory. Dokažte, že následující předpis definuje metriku na $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$:

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \min\{\rho_i(x_i, y_i), 1\}$$

9. Nechť (X, ρ) je metrický prostor. Ukažte, že následující metriky jsou ekvivalentní metrice původní:

   (a) $\sigma(x, y) = \min\{1, \rho(x, y)\}$
   (b) $\sigma(x, y) = \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$

10. Najděte netriviální $A \subset \mathbb{R}$, aby splňovala následující

   (a) $\overline{A} = \partial A$
   (b) $\operatorname{Int} \overline{A} \supsetneq A$
   (c) $\operatorname{Int} \overline{A} \subsetneq A$
   (d) $\overline{\operatorname{Int} A} \subsetneq A$
   (e) $\overline{\operatorname{Int} A} \supsetneq A$
   (f) $\overline{\operatorname{Int} A} = A$

11. Je každá konečná podmnožina metrického prostoru nutně uzavřená?

12. Co lze říci o otevřených množinách, jejichž každý bod je izolovaný?