24. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Definice 1. *Parciální derivací funkce f v bodě $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ podle proměnné x_i definujeme jako limitu*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1, a_2, \dots, a_i + t, \dots, a_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n)}{t}.$$

Věta 2. O zaměnitelnosti paricálních derivací I.

Nechť f je reálná funkce n proměnných, $a \in \mathbb{R}^n$ a $1 \le i, j \le n$. Nechť platí, že
(i) funkce $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ je spojitá v bodě a,
(ii) funkce $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ je definovaná na nějakém okolí bodu a.
Potom existují a jsou si rovny

$$\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Věta 3. O zaměnitelnosti paricálních derivací II.

Nechť f je reálná funkce n proměnných, $a \in \mathbb{R}^n$ a $1 \le i, j \le n$. Nechť platí, že funkce $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ a $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ mají v bodě a totální diferenciál. Potom existují a jsou si rovny

$$\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Věta 4. O zaměnitelnosti paricálních derivací III.

Nechť f je reálná funkce n proměnných a $1 \le i, j \le n$. Nechť platí, že funkce $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ jsou spojité na otevřené množině G. Potom pro každý bod a množiny G platí

$$\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Věta 5. Je-li funkce $f(x, y, z)$ diferencovatelná a $x = \phi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, $z = \chi(u, v)$, kde ϕ, ψ, χ jsou diferencovatelné funkce, pak

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} +$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v} +$$

Příklady

1. Určete parciální derivace funkcí

   (a) $$x^3 + y^3 - 3xy$$

   (b) $$\frac{x(x-y)}{y^2}$$

   (c) $$\sin x - x^2 y$$

   (d) $$\ln(1 + \frac{x}{y})$$

   (e) $$\|\vec{x}\|$$

   (f) $$(1 + \sin^2 x)^{\ln x}$$

   (g) $$(2x + y)^{2x+y}$$

   (h) $$z^x y$$

2. Spočtěte parciální derivace funkce $F(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$, kde $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, pokud

   (a) $u(x, y) = xy$, $v(x, y) = x + y$.
   (b) $u(x, y) = x^2 - y^2$, $v(x, y) = e^{xy}$
   (c) $u(x, y) = x \cos y$, $v(x, y) = y \sin x$.

3. Ověřte záměnnost smíšených parciálních derivací 2. řádu

   (a) $$x^4 + y^4 - 4x^2 y^2$$

   (b) $$x \sin(x + y)$$

   (c) $$\frac{\cos x^2}{y}$$

   (d) $$x^{y^z}$$

   (e) $$\ln(x + y^2)$$

4. Určete, zda lze následující funkci spojitě rozšířit na $\mathbb{R}^2$.

   (a) $$\frac{\sin xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

   (b) $$\frac{\sin xy}{x^2 + y^2}$$

   (c) $$\frac{\sin x + \sin y}{x + y}$$