# 23. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

## Teorie

## Příklady

1. Najděte definiční obor následujících funkcí

   (a) $f(x,y) = \sqrt{x-y}$

   (b) $f(x,y) = \sqrt{y \sin x}$

   (c) $f(x,y) = x^y$

   (d) $f(x,y) = \arccos \frac{1+x^2y^2}{2xy}$

   (e) $f(x,y) = \sqrt{\operatorname{sgn}(\sin x \sin y)}$

2. Popište vrstevnice následujících funkcí

   (a) $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$

   (b) $f(x,y) = \max\{|x|,|y|\}$

   (c) $f(x,y) = \min\{x,y\}$

   (d) $f(x,y) = \frac{\sqrt{x}}{y}$

   `http://www.karlin.mff.cuni.cz/~lmaly/cvika.php?grp=3&sol=N&pdf=N&id=3`
   `http://www.karlin.mff.cuni.cz/~lmaly/cvika.php?grp=3&sol=Y&pdf=N&id=3`

3. Vypočtěte

   (a) Ukažte, že pro funkci $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$ platí

   $$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = 1, \qquad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = -1$$

   a

   $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \text{ neexistuje.}$$

   **Řešení:**
   Nejprve vypočteme obě dvojnásobné limity. Uvědomme si, že vnitřní limitu přes $y$ (resp. $x$) nám stačí počítat pro hodnoty parametru $x$ (resp. $y$) různé od limitního bodu, tj. v našem konkrétním případě pro $x \neq 0$ (resp. $y \neq 0$). Platí, že

   $$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x-y}{x+y}\right) =$$

   pro libovolnou hodnotu „parametru“ $x$ různou od nuly je funkce (proměnné $y$) v bodě nula spojitá, a proto po dosazení $y=0$ máme

   $$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x-0}{x+0}\right) = 1.$$

Obdobně vypočteme

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x-y}{x+y}\right) =$$

pro libovolnou hodnotu „parametru“$y$ různou od nuly je funkce (proměnné $x$) v bodě nula spojitá, a proto po dosazení $x = 0$ máme

$$= \lim_{y\to 0}\left(\frac{0-y}{0+y}\right) = -1.$$

Protože dvojnásobné limity existují a nerovnají se, nemůže dvojná limita existovat (ani vzhledem k definičnímu oboru).

(b) Ukažte, že pro funkci $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ platí

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = 0 \qquad \text{a} \qquad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = 0,$$

ale

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \text{ neexistuje.}$$

**Řešení:**

Vypočtěme nejprve dvojnásobné limity. Uvědomme si, že funkce $f(x,y)$ je jako funkce proměnné $y$ pro pevnou hodnotu $x \neq 0$ spojitá pro všechna $y \in \mathbb{R}$, speciálně v bodě nula. Máme tedy, že pro $x \neq 0$ je

$$\lim_{y\to 0}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = 0.$$

Proto

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}\right) = \lim_{x\to 0}(0) = 0.$$

Obdobně dostaneme, že

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}\right) = \lim_{y\to 0}\left(\frac{0}{0+(0-y)^2}\right) = 0.$$

Určeme nyní limitu po přímce $y = x$ pro $x \to 0$ (potom samozřejmě také $y \to 0$). Máme, že

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot x^2}{x^2\cdot x^2+(x-x)^2} = 1,$$

a protože limita po přímce $y = x$ a dvojnásobné limity (tj. limity po svislé a vodorovné ose) existují a nejsou shodné, dvojná limita nemůže existovat (ani vzhledem k definičnímu oboru).

(c) Ukažte, že pro funkci $f(x,y) = (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$ limity

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) \qquad \text{a} \qquad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) \qquad \text{neexistují,}$$

ale

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ vzhledem k definičnímu oboru funkce $f$ existuje a je rovna nule.

**Řešení:**
Uvědomme si, že pro žádné $x \neq \frac{1}{\pi k}$ pro $k \in \mathbb{Z}$ neexistuje limita

$$\lim_{y\to 0}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}.$$

Formálně to lze nahlédnout pomocí Heineho věty. Volme-li $y_n = 1/2\pi n$, potom

$$\lim_{n\to\infty}(x+y_n)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y_n} = \lim_{n\to\infty}(x+\frac{1}{2\pi n})\sin\frac{1}{x}\sin(2\pi n) = 0,$$

zatímco pro volbu $y_n = 1/(\pi/2 + 2\pi n)$ je

$$\lim_{n\to\infty}(x+y_n)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y_n} = \lim_{n\to\infty}(x+\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n})\sin\frac{1}{x}\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right) = (x+0)\sin\frac{1}{x} \neq 0.$$

Tudíž nemůže existovat ani dvojnásobná limita

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right),$$

protože vnitřní limita není definována na žádném intervalu hodnot $x \in (-\varepsilon, +\varepsilon)$. Ze zcela stejného důvodu neexistuje ani druhá z dvojnásobných limit.
Naopak dvojná limita

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

sice neexistuje vzhledem k $\mathbb{R}^2$ (protože funkce $f$ není definována ani na jedné ze souřadných os, a proto není definována na žádném prstencovém okolí počátku), ale vzhledem k definičnímu oboru funkce $f$ je nulová. To proto, že

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x+y) = 0+0 = 0,$$

neboť polynom $(x+y)$ je spojitá funkce, a dále protože, že funkce $\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$ je omezená. Tudíž podle lemmatu o součinu funkce s nulovou limitou a funkce omezené je výsledná limita opravdu nulová.

(d)

$$\lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x^2-y^2}{x^2-3y+3x-xy}$$

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/kalkulus1/Limity_funkci_vice_promennych.

str. 24, 3.1.2

(e)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}{x^2+y^2}$$

str. 25 3.1.3

(f)

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{e^{(|x|+(y-2)^2)y}-1}{(|x|+(y-2)^2)y}$$

str. 26 3.1.4 c

(g)

$$\lim_{(x,y)\to(4,0)} \frac{\operatorname{tg}\sqrt{(x-4)^2-y^2}}{x^2\sqrt{(x-4)^2-y^2}}$$

str. 29 3.1.6