# 23. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

## Teorie

**Věta 1. Limita a uspořádání**

Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a$ je hromadným bodem množiny $M$ a nechť $f(x) \le g(x)$ na průniku nějakého prstencového okolí bodu $a \in \mathbb{R}^n$ a množiny $M$. Existují-li limity obou funkcí $f$ a $g$ v bodě $a$ vzhledem k množině $M$, potom platí

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in M}} f(x) \le \lim_{\substack{x \to a \\ x \in M}} g(x).$$

Naopak, nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a$ je hromadným bodem množiny $M$. Je-li

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in M}} f(x) < \lim_{\substack{x \to a \\ x \in M}} g(x),$$

potom existuje prstencové okolí $P(a)$ bodu $a \in \mathbb{R}^n$ tak, že $f(x) < g(x)$ na $P(a) \cap M$.

**Věta 2. Věta o dvou policajtech**

Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a$ je hromadným bodem množiny $M$ a nechť $f(x) \le g(x) \le h(x)$ na průniku nějakého prstencového okolí bodu $a \in \mathbb{R}^n$ a množiny $M$. Pokud,

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in M}} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in M}} h(x).$$

potom existuje také limita funkce $g$ v bodě $a$ vzhledem k $M$ a všechny tři limity jsou si rovny, tj.

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in M}} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in M}} g(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in M}} h(x).$$

**Věta 3. Věta „omezená krát nulová“**

Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $a$ buď hromadným bodem množiny $M$. Nechť $f$ je omezená funkce na průniku nějakého prstencového okolí bodu $a \in \mathbb{R}^n$ a množiny $M$ a nechť

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in M}} g(x) = 0.$$

Potom

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in M}} f(x)g(x) = 0.$$

Nejdůležitějším nástrojem pro nás bude věta o limitě složené funkce.

**Věta 4. Věta o limitě složené funkce**

Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $a \in \mathbb{R}^n$ je hromadným bodem množiny $M$. Nechť platí, že

1. $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in M}} f(x) = b$,
2. $\lim\limits_{\substack{y\to b\\ y\in f(M)}} g(y) = L$,
3. je splněna jedna z následujících podmínek:
   (a) $g$ je spojitá v bodě $b$ (vzhledem k množině $M$) nebo
   (b) existuje prstencové okolí $P(a)$ bodu $a$ tak, že $f(x) \neq b$ pro každé $x \in P(a) \cap M$.

Potom
$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in M}} (g \circ f)(x) = L.$$

Jedním z přímočarých důsledků, který ale lze jednoduše dokázat také přímo, je první část následujícího tvrzení.

**Věta 5.** 1. Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $a \in \mathbb{R}^n$ buď hromadným bodem množiny $M$. Jestliže
$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in M}} f(x) = L, \qquad \text{potom} \qquad \lim_{\substack{x\to a\\ x\in M}} |f(x)| = |L|.$$

2. Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $a \in \mathbb{R}^n$ buď hromadným bodem množiny $M$. Potom
$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in M}} f(x) = 0, \qquad \text{právě když} \qquad \lim_{\substack{x\to a\\ x\in M}} |f(x)| = 0.$$

## Příklady

1. Najděte definiční obor následujících funkcí

   (a) $f(x,y) = \sqrt{x-y}$
   (b) $f(x,y) = \sqrt{y\sin x}$
   (c) $f(x,y) = x^y$
   (d) $f(x,y) = \arccos \frac{1+x^2y^2}{2xy}$
   (e) $f(x,y) = \sqrt{\operatorname{sgn}(\sin x \sin y)}$

2. Popište vrstevnice následujících funkcí

   (a) $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$
   (b) $f(x,y) = \max\{|x|, |y|\}$
   (c) $f(x,y) = \min\{x,y\}$
   (d) $f(x,y) = \frac{\sqrt{x}}{y}$

3. Vypočtěte

(a) Ukažte, že pro funkci $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$ platí

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = 1, \qquad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = -1$$

a

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \text{ neexistuje.}$$

(b) Ukažte, že pro funkci $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}$ platí

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = 0 \qquad \text{a} \qquad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = 0,$$

ale

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \text{ neexistuje.}$$

(c) Ukažte, že pro funkci $f(x,y) = (x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$ limity

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) \qquad \text{a} \qquad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) \qquad \text{neexistují,}$$

ale

$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ vzhledem k definičnímu oboru funkce $f$ existuje a je rovna nule.

(d)

$$\lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 - 3y + 3x - xy}$$

(e)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}{x^2 + y^2}$$

(f)

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{e^{(|x| + (y-2)^2)y} - 1}{(|x| + (y-2)^2)y}$$

(g)

$$\lim_{(x,y)\to(4,0)} \frac{\operatorname{tg}\sqrt{(x-4)^2 - y^2}}{x^2\sqrt{(x-4)^2 - y^2}}$$