21. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Abelovo kritérium. *Nechť* $-\infty < a < b \leq +\infty$, *nechť* $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ *je funkce spojitá na* $[a, b)$ *a funkce* $g : [a, b) \to \mathbb{R}$ *je na* $[a, b)$ *spojitá a monotónní.*

Pokud navíc $\int_a^b f$ *konverguje a* g *je omezená v* (a, b)*, pak také konverguje integrál* $\int_a^b fg$.

Dirichletovo kritérium. *Nechť* $-\infty < a < b \leq +\infty$, *nechť* $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ *je funkce spojitá na* $[a, b)$ *a funkce* $g : [a, b) \to \mathbb{R}$ *je na* $[a, b)$ *spojitá a monotónní.*

Pokud navíc f *má omezenou primitivní funkci v* (a, b) *a* $\lim x \to bg(x) = 0$, *pak také konverguje integrál* $\int_a^b fg$.

Příklady

1. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x^a \left(\frac{1}{2}\pi - x\right)^b \mathrm{tg}\,^c x\,dx$

Řešení:

Na (dostatečně malém pravém prstencovém) okolí nuly platí, že integrand nemění znaménko a že

$$\mathrm{tg}\ x \approx x \implies f(x) \approx \left(\frac{\pi}{2}\right)^b \cdot x^{a+c},$$

tudíž dostáváme podmínku na konvergenci $a + c > -1$.

Na (dostatečně malém levém prstencovém) okolí $\pi/2$ platí, že integrand nemění znaménko a že

$$\mathrm{tg}\ x = \frac{\sin x}{\cos x} \approx \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sin(\pi/2 - x)} \approx \frac{1}{\frac{\pi}{2} - x}$$

a tedy

$$f(x) \approx \left(\frac{\pi}{2} - x\right)^{b-c}$$

Substitucí $y = \frac{\pi}{2} - x$ dostaneme, že konvergence vyšetřovaného integrálu na "malém" levém okolí $\pi/2$ je ekvivalentní konvergenci $\int_0^\delta y^{b-c}\,dy$ pro nějaké "malé" δ, odkud máme podmínku $b - c > -1$.

Závěr: protože integrand je spojitý na $[\delta, 1 - \delta]$ pro každé $\delta > 0$ a na vhodných jednostranných okolích nuly $(0, \delta]$ a jedničky $[1 - \delta, 1)$ nemění znaménko, víme z předchozího (pomocí limitního srovnávacího kritéria), že konverguje za podmínky $-1 - a < c < b + 1$, a to navíc absolutně. Jinak diverguje.

2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \operatorname{arcctg}^{\alpha} x^5 \, \sin^5 x^\beta \, dx$

Řešení:

U nuly je

$$\operatorname{arcctg} x \approx \frac{\pi}{2} \implies \operatorname{arcctg}^{\alpha} x^5 \approx \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\alpha}$$

$$\sin x \approx x \implies \sin^5 x^\beta \approx x^{5\beta}$$

a navíc na intervalu $(0, \pi/4]$ integrand nemění znaménko. Proto konverguje tehdy a jen tehdy (podle limitního srovnávacího kritéria), pokud $5\beta > -1$, tj. $\beta > -1/5$.

Protože na okolí nekonečna je

$$\operatorname{arcctg} x \approx \frac{1}{x} \implies \operatorname{arcctg}^{\alpha} x^5 \approx \frac{1}{x^{5\alpha}}$$

a protože funkce $(x\operatorname{arcctg} x)^\alpha$ je monotónní a omezená na $[\pi/4, +\infty)$, stačí dále podle Abelova nebo limitního srovnávacího kritéria vyšetřovat integrál

$$\int_{\pi/4}^{+\infty} \frac{\sin^5 x^\beta}{x^{5\alpha}} \, dx$$

Použitím substituce $t = x^\beta$ dostaneme ekvivalentní integrál

$$\int_{(\pi/4)^\beta}^{+\infty} \frac{\sin^5 t}{t^{5\alpha/\beta - 1/\beta + 1}} \, dt$$

Odtud dostáváme, že integrál konverguje neabsolutně podle Dirichletova kritéria, pokud

$$\frac{5\alpha - 1}{\beta} + 1 > 0 \implies 5\alpha > 1 - \beta$$

a navíc absolutně, pokud

$$\frac{5\alpha - 1}{\beta} + 1 > 1 \implies 5\alpha > 1$$

Závěr: integrál konverguje neabsolutně, pokud $\beta > -1/5$ a současně $\alpha > (1 - \beta)/5$. Pokud navíc ještě $\alpha > 1/5$, integrál konverguje dokonce absolutně.

3. $\displaystyle\int_{-1}^{+\infty} \sqrt[3]{\frac{x^2}{x+1}} \operatorname{arcctg} x \, \sin x \, dx$

Řešení:

Na (dostatečně malém pravém prstencovém) δ-okolí -1 se integrand chová přibližně jako funkce $(x+1)^{-1/3}$, konvergence je tedy ekvivalentní konvergenci integrálu

$$\int_0^\delta y^{-1/3} \, dy$$

o kterém víme, že konverguje (absolutně).

Na okolí nekonečna se integrand bez sinu chová přibližně jako

$$\sqrt[3]{\frac{x^2}{x+1}}\operatorname{arcctg} x \approx x^{1/3} \cdot \frac{1}{x} = x^{-2/3}$$

Odtud plyne podle limitního srovnávacího kritéria srovnáním s integrálem přes funkci $|\sin x|/x^{2/3}$, že integrál nekonverguje absolutně. Naopak použitím Dirichletova kritéria dostaneme neabsolutní konvergenci, neboť $\sin x$ má omezenou primitivní funkci a $x^{-2/3} \to 0$ monotónně pro $x \to +\infty$.

4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \operatorname{arcctg}^{\alpha} x \cos x \, dx$

Řešení: Integrand je zřejmě spojitý na $[0, +\infty)$. Protože na okolí nekonečna je

$$\operatorname{arcctg} x \approx \frac{1}{x}$$

a navíc funkce $x\operatorname{arcctg} x$ je monotónní[1] na $(0, +\infty)$, je konvergence i absolutní konvergence vyšetřovaného integrálu ekvivalentní konvergenci či absolutní konvergenci integrálu

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{\alpha}} \, dx$$

(Pro absolutní konvergenci to plyne z limitního srovnávacího kritéria, pro neabsolutní konvergenci z kritéria Abelova.) O tomto integrálu ale víme, že konverguje neabsolutně pro $\alpha > 0$ a absolutně pro $\alpha > 1$.

5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^a} \sin x \, dx$

Řešení:

Na malém pravém okolí nuly je integrand f nezáporný, spojitý a platí

$$\arctan x \approx x, \sin x \approx x \implies f(x) \approx x^{2-a},$$

odkud plyne, že $\int_0^{\pi/2} f(x)\, dx$ konverguje (a to absolutně) tehdy a jen tehdy, pokud $2 - a > -1$, tedy pokud $a < 3$.

Na intervalu $[\pi/2, +\infty)$ je integrand spojitý. Vyšetřeme nejprve integrál

$$\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^a} \, dx$$

O něm víme, že konverguje, pokud $a > 0$, navíc pro $a > 1$ absolutně. Protože funkce $\arctan x$ je spojitá, omezená a monotónní na $[\pi/2, +\infty)$, za stejných podmínek konverguje (absolutně) také integrál $\int_{\pi/2}^{+\infty} f(x)\, dx$.

Závěr: integrál konverguje pro $0 < a < 3$, navíc pro $1 < a < 3$ absolutně.

[1]) to si zkuste dokázat sami; po zderivování položte $x = \operatorname{cotg} y$ a zkuste vyřešit příslušnou nerovnici

6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(e^{2x}+e^x+1)}{x^a}\sin x\,dx$

Řešení:

U nuly použijte odhady

$$\ln(e^{2x}+e^x+1) \approx \ln 3, \qquad \sin x \approx x \implies f(x) \approx x^{1-a}$$

navíc na dosti malém pravém okolí nuly integrand nemění znaménko, takže podle limitního srovnávacího kritéria máme podmínku na konvergenci i absolutní konvergenci $1-a > -1$, tudíž $a < 2$.

U nekonečna použijte odhady

$$\ln(e^{2x}+e^x+1) \approx 2x \implies f(x) \approx \frac{2\sin x}{x^{a-1}}$$

z čehož pro absolutní konvergenci máme podle limitního srovnávacího kritéria (srovnáváme integrand s $2|\sin x|/x^{a-1}$) podmínku $a-1 > 1$, tudíž $a > 2$, čímž je absolutní konvergence vzhledem k výše uvedené podmínce u nuly vyloučena.

Pro neabsolutní konvergenci máme podle Dirichletova kritéria podmínku $a-1 > 0$, tedy $a > 1$. Člen $\ln(e^{2x}+e^x+1)/2x$ se přilepí pomocí Abelova kritéria, neboť z tvaru

$$\frac{\ln(e^{2x}+e^x+1)}{2x} = 1 + \frac{\ln(1+e^{-x}+e^{-2x})}{2x}$$

je patrné, že jde o monotónní funkci na nějakém okolí nekonečna.

Závěr: Integrál konverguje pouze neabsolutně pro $1 < a < 2$. Absolutně nekonverguje pro žádné $a \in \mathbb{R}$.

7. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^a \arccos\frac{x}{x+1}\sin x\,dx$

Řešení:

Na okolí nuly je

$$\arccos\frac{x}{x+1} \approx \arccos 0 = \frac{\pi}{2}, \qquad \sin x \approx x \implies f(x) \approx \frac{\pi}{2}x^{a+1}$$

a integrand na dostatečně malém pravém okolí nuly nemění znaménko, proto podle limitního srovnávacího kritéria máme podmínku na absolutní i neabsolutní konvergenci $a+1 > -1$, tedy $a > -2$.

U nekonečna je

$$\arccos\frac{x}{x+1} \approx \sqrt{1-\left(\frac{x}{x+1}\right)^2} = \frac{\sqrt{2x+1}}{x+1} \approx \frac{\sqrt{2x}}{x} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}$$

Odkud vyplývá (podle Abelova nebo limitního srovnávacího kritéria – ověřte vždy monotónii v příslušných krocích!), že stačí vyšetřovat konvergenci integrálu

$$\int_M^{+\infty} x^{a-1/2} \sin x$$

Tento integrál konverguje absolutně pro $a - 1/2 < -1$, tedy pro $a < -1/2$ a neabsolutně pro $a - 1/2 < 0$, tedy pro $a < 1/2$.

Závěr: integrál konverguje pro $-2 < a < 1/2$. Pokud je navíc $-2 < a < -1/2$, pak konverguje absolutně.

Poznámka k monotonii: v průběhu příkladu je možné, že budete potřebovat monotonii funkce $\sqrt{x}\operatorname{arccos}\frac{x}{x+1}$ (alespoň na nějakém okolí nekonečna). Dokažte ji tak, že tuto funkci zderivujete a při hledání nulových bodů derivace se podívejte na limitu v nekonečnu.

8. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x \sin x}{x \arctan(1-x)}\, dx$

Řešení:

U nuly použijte odhady

$$\sin x \approx x, \qquad \arctan(1-x) \approx \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

z nichž plyne, že integrand na nějakém dostatečně malém pravém okolí nuly nemění znaménko a lze jej srovnat

$$f(x) \approx \ln x$$

přičemž $\int_0^\delta \ln x\, dx$ konverguje absolutně (ověřte přímým výpočtem).

Na intervalu $(0, +\infty)$ je integrand spojitý.

U nekonečna použijte odhad

$$\arctan(1-x) \approx -\frac{\pi}{2}$$

a díky monotonii a omezenosti funkce arctan stačí vyšetřovat (podle Abelova či limitního srovnávacího kritéria) pouze integrál

$$\int_M^{+\infty} \frac{\ln x}{x} \sin x\, dx$$

Absolutní konvergence je vyloučena, použijte odhad

$$\left| \frac{\ln x}{x} \sin x \right| \geq \frac{|\sin x|}{x}$$

platný pro $x > e$ a znalost toho, že "integrál" napravo je divergentní. Neabsolutní konvergenci dává Dirichletovo kritérium, vzhledem k tomu, že $\ln x/x \to 0$ monotónně na nějakém okolí nekonečna (ukažte, že derivace této funkce je záporná pro $x > e$) a funkce $\sin x$ má omezenou primitivní funkci.

Závěr: integrál konverguje (pouze) neabsolutně.

9. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan{}^{\alpha} x}{\ln^{\beta}(1+x)} \sin x \, dx$

Řešení:

U nuly použijeme odhady

$$\arctan x \approx x, \quad \ln(1+x) \approx x, \quad \sin x \approx x$$

stačí tedy vyšetřovat integrál

$$\int_0^{\delta} x^{\alpha+1-\beta} \, dx$$

který konverguje (absolutně) pro $\alpha > \beta - 2$.

U nekonečna nenastává absolutní konvergence nikdy, neboť $\ln^{\beta}(1+x) \leq \sqrt{x}$ pro nějaké $x > x_{\beta}$ reálné a srovnávací kritérium aplikované na $|\sin x|/\sqrt{x}$ dává divergenci.

Neabsolutní konvergence u nekonečna nastává pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ a $\beta > 0$ podle Dirichletova kritéria pro $\sin x/\ln^{\beta}(1+x)$ a tudíž podle Abelova kritéria pro vyšetřovaný integrál.

Závěr: integrál konverguje neabsolutně pro $\beta > 0$ a $\alpha > \beta - 2$. Absolutně nikdy.

10. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\exp(\sin x)}{x^{\alpha}} \sin 2x \, dx$

Řešení:

Protože

$$1/e \leq e^{\sin x} \leq e, \qquad \text{pro každé } x \in \mathbb{R}$$

a na okolí nuly je

$$\sin 2x \approx 2x$$

stačí na okolí nuly vyšetřovat integrál

$$\int_0^{\delta} x^{1-\alpha} \, dx$$

který konverguje pro každé $\alpha < 2$.

Podle limitního srovnávacího kritéria konverguje integrál na okolí nekonečna (vzhledem k odhadům na $e^{\sin x}$) absolutně pro $\alpha > 1$ (srovnáním s $e|\sin 2x|/x^{\alpha}$).

Integrál na okolí nekonečna konverguje neabsolutně pro $\alpha > 0$. Nahlédneme to podle Dirichletova kritéria, pokud dokážeme, že $e^{\sin x}\sin 2x$ má omezenou primitivní funkci na $(0, +\infty)$. Lze ale přímo počítat (substitucí $t = \sin x$ a per partes)

$$\int e^{\sin x} \cdot 2\sin x \cos x \, dx = \int ue^u \, du = ue^u - e^u = C + \sin x e^{\sin x} - e^{\sin x}$$

což je evidentně omezená funkce.

POZOR! Protože $e^{\sin x}$ není na žádném okolí nekonečna monotónní, nelze použít "techniku přilepení" podle Abelova kritéria.

11. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan^{\alpha} x \operatorname{arcctg}^{\beta} x}{x^{\gamma}} \cos x \, dx$

Řešení:

Na okolí nuly je

$$\arctan^{\alpha} x \approx x^{\alpha}, \quad \operatorname{arcctg}^{\beta} x \approx= \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\beta}, \quad \cos x \approx 1.$$

Tudíž na dostatečně malém okolí nuly integrand nemění znaménko a chová se přibližně jako funkce $x^{\alpha-\gamma}$. Odtud plyne, že integrál na vhodném okolí nuly konverguje (a to absolutně), pokud $\alpha - \gamma > -1$.

Na okolí nekonečna zase platí

$$\arctan^{\alpha} x \approx \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\alpha}, \quad \operatorname{arcctg}^{\beta} x \approx \frac{1}{x^{\beta}}.$$

Podle limitního srovnávacího kritéria aplikovaného na funkci $|\cos x|/x^{\gamma+\beta}$ dostaneme, že integrál na vhodném okolí nekonečna konverguje absolutně, pokud $\gamma + \beta > 1$.

Podle Dirichletova kritéria pak máme, že integrál $\cos x/x^{\gamma+\beta}$ na vhodném okolí nekonečna konverguje neabsolutně, pokud $\gamma + \beta > 0$. Pomocí Abelova kritéria pak dostaneme, že za stejné podmínky konverguje neabsolutně také vyšetřovaný integrál (neboť funkce $\arctan x$ a $x\operatorname{arcctg} x$, a tedy také jejich mocniny, jsou na vhodném okolí nekonečna monotónní a omezené).

12. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \arctan^{a} x^{\alpha} \operatorname{arcctg}^{\beta} x^{\gamma} \arcsin(\sin x) \, dx$

Řešení:

Na dostatečně malém okolí nuly je

$$\arctan x \approx x, \qquad \operatorname{arcctg} 0 = \frac{\pi}{2}, \qquad \arcsin(\sin x) = x$$

Na pravém okolí nuly $(0, \pi/4]$ je tedy integrand nezáporný a konvergence integrálu přes tento interval je podle limitního srovnávacího kritéria ekvivalentní konvergenci integrálu

$$\int_0^{\pi/4} x^{a\alpha+1} \, dx$$

odkud plyne podmínka $a\alpha > -2$.

Na okolí nekonečna zase platí

$$\operatorname{arctan} \infty = \frac{\pi}{2}, \qquad \operatorname{arcctg} x \approx \frac{1}{x}$$

a funkce arcsin $(\sin x)$ tvoří pilovitou po částech lineární funkci měnící hodnoty od $-\pi/2$ do $\pi/2$ s periodou 2π.

Z toho plyne, že integrál na intervalu $[\pi/4, +\infty)$ konverguje absolutně, právě když absolutně konverguje integrál

$$\int_{\pi/4}^{+\infty} \frac{1}{x^{\gamma\beta}}\, dx$$

odkud plyne podmínka $\beta\gamma > 1$.

A protože arcsin $(\sin x)$ má na $[\pi/4, +\infty)$ omezenou primitivní funkci (ověřte!!), integrál konverguje neabsolutně, pokud $\beta\gamma > 0$. O části integrálu bez arctan to plyne z Dirichletova kritéria, arctan ${}^a x^\alpha$ se přilepí pomocí Abelova kritéria.