20. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Věta 1 (srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in R^*$ a nechť $a < b$. Nechť funkce $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ splňují $0 \leq f(x) \leq g(x)$, $x \in [a, b)$. Nechť dále je f spojitá na $[a, b)$ a platí $g \in \mathcal{N}(a, b)$. Potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$.

Věta 2 (limitní srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in R^*$ a nechť $a < b$. Nechť f, g jsou spojité nezáporné funkce na $[a, b)$. Jestliže $\lim_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)} \in (0, \infty)$, pak $f \in \mathcal{N}(a, b)$ právě tehdy, když $g \in \mathcal{N}(a, b)$.

Příklady

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x^a}\,dx$, $a \in \mathbb{R}$

   Řešení: Použijeme limitní srovnávací kritérium. Platí, že
   $$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1,$$
   a proto platí
   $$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{\sin x}{x^a}}{\frac{x}{x^a}} = 1,$$
   tudíž platí, že integrál (a) konverguje (absolutně), právě když konverguje integrál
   $$\int_0^1 \frac{x}{x^a}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{a-1}}\,dx$$
   o kterém víme, že konverguje (absolutně) pro $a - 1 < 1$, tudíž pro $a < 2$.

2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos x}{x^a}\,dx$, $a \in \mathbb{R}$

   Řešení:

   Použijeme limitní srovnávací kritérium. Platí, že
   $$\lim_{x\to 0+} \frac{\cos x}{1} = 1,$$
   a proto platí
   $$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{\cos x}{x^a}}{\frac{1}{x^a}} = 1,$$

tudíž platí, že integrál (b) konverguje (absolutně), právě když konverguje integrál

$$\int_0^1 \frac{1}{x^a}\,dx$$

o kterém víme, že konverguje (absolutně) pro $a < 1$.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{(x^4-1)\operatorname{arcctg} x}}\,dx$$

Řešení:

Označme f integrand. Integrál rozdělíme na dvě části

$$\int_1^2 f(x)\,dx, \qquad \int_2^\infty f(x)\,dx$$

Použijeme dvakrát srovnávací kritérium, poprvé u jedničky a po druhé u nekonečna. Protože $\operatorname{arcctg} 1 = \pi/4$ a platí, že

$$x^4 - 1 = (x^2+1)(x+1)(x-1),$$

můžeme u jedničky srovnávat s funkcí $1/\sqrt{x-1}$, neboť máme

$$\lim_{x\to 1+} \frac{\frac{1}{\sqrt{(x^4-1)\operatorname{arcctg} x}}}{\frac{1}{\sqrt{x-1}}} = \lim_{x\to 1+} \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)(x+1)\operatorname{arcctg} x}} = \frac{2}{\pi} \neq 0$$

Protože f je spojitá a nezáporná funkce na $(1,2]$, dostáváme podle limitního srovnávacího kritéria, že konvergence integrálu $\int_1^2 f$ je ekvivalentní s konvergencí integrálu

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx$$

který konverguje, což ověříme přímým výpočtem:

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx = \left[2\sqrt{x-1}\right]_1^2 = 2.$$

Pojďme na druhou část integrálu $\int_2^{+\infty} f$. Jistě f je spojitá a nezáporná na $[2,+\infty)$, a protože platí, že

$$\lim_{x\to+\infty} x\operatorname{arcctg} x = 1,$$

můžeme srovnat integrand s funkcí

$$\frac{1}{\sqrt{(x^4-1)\operatorname{arcctg} x}} \approx \frac{1}{\sqrt{x^4\cdot(1/x)}} = x^{-3/2}.$$

Přesněji: platí, že

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{(x^4-1)\text{arcctg } x}}}{x^{-3/2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^4-1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x\text{arcctg } x}} = 1.$$

Tudíž konvergence integrálu $\int_2^{+\infty} f$ je ekvivalentní konvergenci integrálu

$$\int_2^{+\infty} x^{-3/2}\, dx$$

který konverguje, o čemž se lze přesvědčit přímým výpočtem.[1]

Závěr: Integrál konverguje (absolutně).

3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \arctan^{\alpha} x \sin\frac{1}{x^\beta}\, dx$

Řešení:

Integrál roztrhneme na dva kusy. Protože pro $x > 1$ je $1/x^\beta < 1$ (vzhledem k tomu, že podle zadání je $\beta > 0$), je integrand na $[2, +\infty)$ nezáporný a spojitý. Použijeme tedy na tomto intervalu srovávací kritérium: na okolí nekonečna platí, že

$$\arctan^{\alpha} x \sin\frac{1}{x^\beta} \approx \left(\frac{\pi}{2}\right)^\alpha \frac{1}{x^\beta},$$

přesněji platí, že

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\arctan^{\alpha} x \sin\frac{1}{x^\beta}}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^\alpha \frac{1}{x^\beta}} = 1.$$

Podle limitního srovnávacího kritéria tedy $\int_2^{+\infty} f$ konverguje (absolutně), právě když $\beta > 1$.

Na intervalu $[0, 2]$ je ale integrand pro $\alpha, \beta > 0$ omezený a na $(0, 2]$ spojitý. Podle srovnávacího kritéria a odhadu

$$\left|\arctan^{\alpha} x \sin\frac{1}{x^\beta}\right| \le \pi^\alpha$$

integrál na tomto intervalu konverguje absolutně.

Z toho vyplývá, že integrál konverguje absolutně pro $\beta > 1$, jinak diverguje.

4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 \pi x}{x \ln^2 x}\, dx$

Řešení:

Integrand f má spojité rozšíření do nuly, neboť

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^3 \pi x}{x \ln^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin \pi x}{\pi x} \cdot \pi \cdot \frac{\sin^2 \pi x}{\ln^2 x} = 1 \cdot \pi \cdot 0 = 0.$$

[1]) neboť exponent $-3/2$ je menší než -1.

Integrand tedy můžeme považovat za funkci spojitou na $[0, +\infty)$. Z toho plyne, že

$$\int_0^2 f(x)\,dx$$

konverguje absolutně, neboť jde o spojitou (a tedy omezenou) funkci na uzavřeném omezeném intervalu. Nyní použijeme odhad

$$\int_2^{+\infty} |f(x)| \leq \int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2 x}\,dx$$

Protože integrál napravo konverguje, jak se můžeme přesvědčit přímým výpočtem pomocí substituce $t = \ln x$

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2 x}\,dx = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt = \left[\frac{-1}{t}\right]_{\ln 2}^{+\infty} = \frac{1}{\ln 2}$$

dostáváme, že vyšetřovaný integrál konverguje absolutně.

5. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{cotg}^a x}{\cos^b x} \ln \frac{2x}{\pi}\,dx$

Řešení:

Integrand nemění znaménko, stačí vyšetřovat absolutní konvergenci.

Na malém pravém δ-okolí nuly je

$$\cos x \approx 1, \quad \operatorname{cotg} x \approx \frac{1}{\sin x} \approx \frac{1}{x}$$

a tudíž podle limitního srovnávacího kritéria stačí na tomto okolí vyšetřovat konvergenci integrálu

$$\int_0^{\delta} \frac{\ln(2x/\pi)}{x^a}\,dx$$

Tento integrál konverguje absolutně pro $a < 1$ (jak plyne z tvaru $x^{(1-a)/2} \ln(2\pi/x) \cdot x^{-(1+a)/2}$, který lze v dostatečné blízkosti nuly odhadnout seshora druhým členem).

Na malém levém ε-okolí $\pi/2$ zase platí

$$\operatorname{cotg} x \approx \cos x = \sin(\pi/2 - x) \approx (\pi/2 - x), \qquad \ln\left(\frac{2x}{\pi}\right) \approx \frac{2}{\pi}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

odkud plyne podle limitního srovnávacího kritéria, že stačí vyšetřovat integrál

$$\int_{\pi/2-\varepsilon}^{\pi/2} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{a-b+1} dx$$

který substitucí $y = x - \pi/2$ převedeme na integrál

$$\int_0^{\varepsilon} y^{a-b+1}\,dy$$

který konverguje pro $a - b + 1 > -1$.

Závěr: integrál konverguje pro $1 > a > b - 2$, a to navíc absolutně. Jinak diverguje.

6. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arccos^{\alpha} x \sin^{\beta} \pi x}{x^{\gamma}(1-x)^{\gamma}}\, dx$

Řešení:

Na intervalu $(0, 1)$ je integrand spojitá omezená funkce, na jakémkoliv uzavřeném podintervalu tedy konverguje absolutně.

U nuly použijte odhady

$$\arccos x \approx \pi/2, \qquad 1 - x \approx 1, \qquad \sin(\pi x) \approx \pi x$$

a tudíž stačí vyšetřovat (neměnnost znaménka, limitní srovnávací kritérium)

$$\int_0^{\delta} x^{\beta-\gamma}\, dx$$

odkud máme podmínku $\beta > \gamma - 1$ (pro absolutní i neabsolutní konvergenci).

U jedničky použijte odhady

$$\sin(\pi x) = -\sin(\pi x - \pi) \approx -\pi(x-1) = \pi(1-x)$$
$$\arccos x \approx \sqrt{1-x^2} = \sqrt{(1+x)(1-x)} \approx \sqrt{2} \cdot \sqrt{1-x}$$

a proto stačí vyšetřovat integrál

$$\int_{1-\delta}^{1} (1-x)^{\beta+\alpha/2-\gamma}\, dx$$

odkud máme podmínku $\beta > \gamma - 1 - \alpha/2$ (pro absolutní i neabsolutní konvergenci).

Závěr: pro $\beta > \gamma - 1$ integrál konverguje, navíc absolutně. Jinak diverguje.

7. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(\operatorname{arcctg}^{\alpha} x^{\beta})\, dx$

Řešení:

Na okolí nuly má integrand spojité rozšíření, neboť

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{arcctg} x = \operatorname{arcctg} 0 = \frac{\pi}{2} \implies \lim_{x\to 0} \operatorname{arcctg}^{\alpha} x^{\beta} = (\operatorname{arcctg} 0)^{\alpha} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\alpha}$$

a funkce sinus je ve všech bodech spojitá.

Na okolí nekonečna platí, že integrand nemění znaménko a

$$\operatorname{arcctg} x \approx \frac{1}{x} \implies \operatorname{arcctg} x^{\beta} \frac{1}{x^{\beta}} \implies \operatorname{arcctg}^{\alpha} x^{\beta} \approx \frac{1}{x^{\alpha\beta}} \implies \sin(\operatorname{arcctg}^{\alpha} x^{\beta}) \approx \frac{1}{x^{\alpha\beta}}$$

odkud podle limitního srovnávacího kritéria vyplývá, že integrál konverguje tehdy a jen tehdy, pokud $\alpha\beta > 1$ a to navíc absolutně. Jinak diverguje.

8. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a} \ln \frac{x^2-1}{x^2+1} \arctan \frac{x}{x^3-1}\, dx$

Řešení:

U jedničky použijeme srovnání

$$\ln \frac{x^2-1}{x^2+1} = \ln \frac{(x-1)(x+1)}{x^2+1} \approx \ln(x-1)$$

$$\frac{1}{x^a} \approx 1, \qquad \arctan \frac{x}{x^3-1} \approx \frac{\pi}{2}$$

Tudíž na okolí jedničky se integrand chová obdobně, jako $\ln y$ na pravém okolí nuly; přitom platí, že $\int_0^1 \ln y\, dy$ je absolutně konvergentní (lze ověřit přímým výpočtem integrací per partes).

Na okolí nekonečna platí, že

$$\ln \frac{x^2-1}{x^2+1} = \ln \left(1 - \frac{2}{x^2+1}\right) \approx -\frac{2}{x^2+1} \approx -\frac{2}{x^2}$$

$$\arctan \frac{x}{x^3-1} \approx \arctan \frac{1}{x^2} \approx \frac{1}{x^2}$$

odkud vyplývá, že na okolí nekonečna se integrand chová přibližně jako funkce $\frac{1}{x^{a+4}}$. Protože na vhodném okolí nekonečna nemění znaménko, stačí vyšetřovat jeho absolutní konvergenci. Z výše uvedeného srovnání použitím limitní verze srovnávacího kritéria dostanene, že integrál konverguje pro $a + 4 > 1$, tedy pro $a > 3$.

9. $\displaystyle\int_0^1 \arccos^a(\sqrt{1-x^4}) \cos \frac{1}{\sqrt{1-x}}\, dx$

Řešení:

Uvědomme si nejprve, že je

$$\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$$

a podle l'Hopitalova pravidla platí, že

$$\lim_{y\to 1-} \frac{\arccos y}{\sqrt{1-y^2}} = \lim_{y\to 1-} \frac{-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}}{-\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}} = 1$$

Odtud plyne, že na dostatečně malém pravém prstencovém okolí nuly je integrand nezáporný a jeho první člen se chová přibližně jako

$$\arccos^a(\sqrt{1-x^4}) \approx \left(\sqrt{1-(1-x^4)}\right)^a = x^{2a}$$

odkud pomocí limitního srovnávacího kritéria plyne, že integrál může konvergovat pouze pro $2a > -1$.

Uvědomme si dále, že na intervalu $(\delta, 1)$ pro $\delta > 0$ je integrand spojitá a omezená funkce, a tudíž $\int_\delta^1 f(x)\,dx$ konverguje absolutně.

Závěr: integrál konverguje pro $a > -1/2$ a to navíc absolutně. Jinak diverguje.

10. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^a e^{-(bx+cx^2)}\,dx$

Řešení:

Integrand je nezáporný, stačí vyšetřovat absolutní konvergenci.

Na okolí nuly je $e^{-bx-cx^2} \approx 1$ a tudíž

$$f(x) \approx x^a,$$

odkud podle limitního srovnávacího kritéria vyplývá, že integrand na vhodném pravém okolí nuly, např. $[0,1]$, konverguje, právě když $a > -1$.

Na okolí nekonečna $[1, +\infty)$ rozlišíme následující případy:

1. $c > 0$. Potom integrál konverguje absolutně podle srovnávacího kritéria srovnáním s integrálem $\int_1^{+\infty} e^{-(c/2)x^2}$. Platí totiž, že

$$\frac{x^a e^{-bx-cx^2}}{e^{-(c/2)x^2}} \xrightarrow{x\to\infty} 0$$

a tudíž pro nějaké $x_a > 0$ musí platit, že pro $x > x_a$ je $x^a e^{-bx-cx^2} \le e^{-(c/2)x^2} \le e^{-(c/2)x}$. Poslední odhad plyne z toho, že pro $x > 1$ je $x^2 > x$ a funkce e^{-y} je klesající v proměnné y. Konvergenci integrálu $\int_1^{+\infty} e^{-(c/2)x}\,dx$ lze snadno ověřit přímým výpočtem.

2. $c < 0$. Integrál diverguje podle srovnávacího kritéria srovnáním $f(x) \ge e^{-(c/2)x^2} \ge e^{-(c/2)x}$.

3. $c = 0$ a $b > 0$. Integrál konverguje srovnáním $x^a e^{-bx} \le e^{-(b/2)x}$, která platí pro $x > x_b > 1$, kde x_b je reálné číslo (které závisí na hodnotě konstanty b). Odhad se odvodí pomocí limity obdobně jako v bodě 1.

4. $c = 0$ a $b < 0$. Integrál diverguje srovnáním $x^a e^{-bx} \ge e^{-(b/2)x}$.

5. $c = 0$ a $b = 0$. Potom (připomeňme, že jsme na okolí nekonečna) integrál konverguje pro $a < -1$.

Závěr: porovnáním podmínky na okolí nuly ($a > -1$) a podmínek v bodech 1-5 dostaneme, že integrál konverguje pro $a > -1 \wedge c > 0$ nebo pro $a > -1 \wedge b > 0 \wedge c = 0$. Pak konverguje navíc absolutně. Jinak diverguje.