20. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Věta 1 (srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in R^*$ a nechť $a < b$. Nechť funkce $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ splňují $0 \leq f(x) \leq g(x)$, $x \in [a, b)$. Nechť dále je f spojitá na $[a, b)$ a platí $g \in \mathcal{N}(a, b)$. Potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$.

Věta 2 (limitní srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in R^*$ a nechť $a < b$. Nechť f, g jsou spojité nezáporné funkce na $[a, b)$. Jestliže $\lim_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)} \in (0, \infty)$, pak $f \in \mathcal{N}(a, b)$ právě tehdy, když $g \in \mathcal{N}(a, b)$.

Příklady

Určete, zda následující integrály konvergují:

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x^a}\,dx,\ a \in \mathbb{R}$
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos x}{x^a}\,dx,\ a \in \mathbb{R}$
3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{(x^4-1)\operatorname{arcctg} x}}\,dx$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \arctan^{\alpha} x \sin\frac{1}{x^{\beta}}\,dx$
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 \pi x}{x \ln^2 x}\,dx$
6. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{cotg}^{a} x}{\cos^b x} \ln\frac{2x}{\pi}\,dx$
7. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arccos^{\alpha} x \,\sin^{\beta} \pi x}{x^{\gamma}(1-x)^{\gamma}}\,dx$
8. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(\operatorname{arcctg}^{\alpha} x^{\beta})\,dx$
9. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a} \ln\frac{x^2-1}{x^2+1} \arctan\frac{x}{x^3-1}\,dx$
10. $\displaystyle\int_0^1 \arccos^{a}(\sqrt{1-x^4}) \cos\frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$
11. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^a e^{-(bx+cx^2)}\,dx$