19. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Příklady

1. $\displaystyle\int_0^1 x^a\,dx$, kde $a \in \mathbb{R}$.

   Řešení:

   Protože integrand je nezáporný, stačí vyšetřovat absolutní konvergenci.

   Pro $a \neq -1$ je
   $$\int x^a\,dx \stackrel{C}{=} \frac{x^{a+1}}{a+1}$$
   primitivní funkcí k funkci x^a na $(0,1)$, a tedy také zobecněnou primitivní funkcí na $[0,1]$. Odtud je zřejmé, že pro $a > -1$ integrál konverguje a pro $a < -1$ diverguje (neboť limita zobecněné primitivní funkce v nule zprava existuje, ale není konečná).

   Pro $a = -1$ je
   $$\int \frac{1}{x}\,dx \stackrel{C}{=} \ln x$$
   primitivní funkcí k funkci $\frac{1}{x}$ na $(0,1)$,[1] a tedy také zobecněnou primitivní funkcí na $[0,1]$. Odtud je zřejmé, že pro $a = -1$ integrál diverguje (neboť limita zobecněné primitivní funkce v nule zprava existuje, ale není konečná).

   Závěr: Konverguje (absolutně) pro $a > -1$.

2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^a\,dx$, kde $a \in \mathbb{R}$

   Řešení:

   Protože integrand je nezáporný, stačí vyšetřovat absolutní konvergenci.

   Pro $a \neq -1$ je
   $$\int x^a\,dx \stackrel{C}{=} \frac{x^{a+1}}{a+1}$$
   primitivní funkcí k funkci x^a na $(1,+\infty)$, a tedy také zobecněnou primitivní funkcí. Odtud je zřejmé, že pro $a < -1$ integrál konverguje a pro $a > -1$ diverguje (neboť limita zobecněné primitivní funkce v nekonečnu existuje, ale není konečná).

[1] proto nemusíme psát ve výsledku absolutní hodnotu

Pro $a = -1$ je

$$\int \frac{1}{x}\, dx \overset{C}{=} \ln x$$

primitivní funkcí k funkci $\frac{1}{x}$ na $(1, +\infty)$, a tedy také zobecněnou primitivní funkcí. Odtud je zřejmé, že pro $a = -1$ integrál diverguje (neboť limita zobecněné primitivní funkce v nekonečnu existuje, ale není konečná).

Závěr: Konverguje (absolutně) pro $a < -1$.

3. $\displaystyle\int_0^\infty e^{ax}\,\mathrm{d}x$ kde $a \in \mathbb{R}$

   Řešení: diplomka 4.1.1

4. $\displaystyle\int_e^\infty \frac{\ln^a x}{x}\,\mathrm{d}x,\ a \in \mathbb{R}$

   Řešení: diplomka 4.1.1

5. $\displaystyle\int_3^\infty \frac{x-1}{x^2+2x}\,\mathrm{d}x$

   Řešení: diplomka 4.1.2

6. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x+5}{x^3+3x^2-1}\,\mathrm{d}x$

   Řešení: diplomka 4.1.3

7. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{x^3+1}\,\mathrm{d}x$

   Řešení: Konverguje - u 0 je funkce spojitá, u ∞ srovnáme s $1/x^2$.

8. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x$

   Řešení: Konverguje - na intervalu $[0, 1]$ je funkce spojitá, na intervalu $[1, \infty)$ srovnáme s funkcí e^{-x}.

9. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arcctg}{}^a x}{x^b}\, dx$

   Řešení:

   Integrand f je nezáporná funkce, stačí tedy vyšetřovat absolutní konvergenci. K tomu použijeme limitní srovnávací kritérium a rozklad

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arcctg}{}^a x}{x^b}\, dx = \int_0^1 \frac{\operatorname{arcctg}{}^a x}{x^b}\, dx + \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arcctg}{}^a x}{x^b}\, dx$$

   Má-li totiž (absolutně) konvergovat integrál vpravo, pak také konvergují (absolutně) oba integrály vlevo (integrujeme přes menší množinu). Naopak, pokud (absolutně) konvergují integrály vpravo, pak také konverguje (absolutně) integrál vlevo (existencí integrálů je zaručena existence zobecněné primitivní funkce na celém intervalu i konečnost integrálu).[2]

Vyšetřujme nyní (absolutní) konvergenci integrálu

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arcctg}^a x}{x^b}\, dx$$

Funkce $\frac{\operatorname{arcctg}^a x}{x^b}$ je spojitá a nezáporná na $(0,1]$, a protože

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{\operatorname{arcctg}^a x}{x^b}}{\frac{1}{x^b}} = \lim_{x\to 0+} \operatorname{arcctg}^a x = (\pi/2)^a$$

je (absolutní) konvergence vyšetřovaného integrálu ekvivalentní (absolutní) konvergenci integrálu

$$\int_0^1 \frac{1}{x^b}\, dx$$

Přímým výpočtem se přesvědčíme, že tento integrál konverguje pro $b < 1$.

Vyšetřujme nyní (absolutní) konvergenci integrálu

$$\int_1^\infty \frac{\operatorname{arcctg}^a x}{x^b}\, dx$$

Funkce $\frac{\operatorname{arcctg}^a x}{x^b}$ je spojitá a nezáporná na $[1,+\infty)$, a protože

$$\lim_{x\to +\infty} x \operatorname{arcctg} x = 1,$$

platí také, že

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{\operatorname{arcctg}^a x}{x^b}}{\frac{1}{x^{a+b}}} = \lim_{x\to 0+} x^a \operatorname{arcctg}^a x = 1,$$

a tudíž je (absolutní) konvergence vyšetřovaného integrálu ekvivalentní (absolutní) konvergenci integrálu

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{a+b}}\, dx$$

Přímým výpočtem se přesvědčíme, že tento integrál konverguje pro $a + b > 1$ a diverguje jinak.

Závěr: Integrál konverguje (absolutně), pokud $1 > b > 1 - a$. Jinak diverguje.

10. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \arctan \frac{x}{x^2+1} \ln^a x\, dx$

Řešení:

[2]) Tento krok v následujících příkladech již nebudeme komentovat

Integrand je nezáporný, stačí vyšetřovat absolutní konvergenci.

Na pravém okolí jedničky je

$$\arctan\frac{x}{x^2+1}\approx\frac{1}{2},\qquad \ln x=\ln(1+(x-1))\approx(x-1)$$

(jak dostaneme použitím Taylorova rozvoje logaritmu v nule). Odtud plyne, že konvergence integrálu

$$\int_1^2 f(x)\,dx$$

je podle limitního srovnávacího kritéria ekvivalentní konvergenci integrálu

$$\int_1^2 (x-1)^a\,dx$$

a použitím substituce $y=x-1$ dostaneme, že tento je ekvivalentní integrálu

$$\int_0^1 y^a\,dy$$

Poslední integrál konverguje, a to absolutně, pro $a>-1$.

Naopak na okolí nekonečna je

$$\arctan\frac{x}{x^2+1}\approx\frac{1}{x}$$

a podle limitního srovnávacího kritéria je konvergence integrálu

$$\int_2^{+\infty} f(x)\,dx$$

ekvivalentní konvergenci integrálu

$$\int_2^{+\infty}\frac{\ln^a x}{x}\,dx$$

U tohoto integrálu ale umíme přímo určit primitivní funkci. Na intervalu $(2,+\infty)$ platí, že

$$\int\frac{\ln^a x}{x}\,dx=\int y^a\,dy=\frac{y^{a+1}}{a+1}+C=\frac{\ln^{a+1}x}{a+1}+C$$

pro $a\neq-1$. Odtud přímo vyplývá, že integrál konverguje pro $a+1<0$, tedy pro $a<-1$.

Hodnotu $a=-1$ lze také vyloučit přímým výpočtem, ale vzhledem k podmínce u jedničky to není nutné.

11. $\displaystyle\int_1^\infty\frac{\sin x}{x^4}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Integrál konverguje absolutně, neb $\frac{|\sin x|}{x^4}\leq\frac{1}{x^4}$.