

19. cvičení

<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/>
kytaristka@gmail.com

Teorie

Věta 1 (srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu). Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$ a necht' $a < b$. Nechť funkce $f, g : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ splňují $0 \leq f(x) \leq g(x)$, $x \in [a, b)$. Nechť dále je f spojitá na $[a, b)$ a platí $g \in \mathcal{N}(a, b)$. Potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$.

Věta 2 (limitní srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu). Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$ a necht' $a < b$. Nechť f, g jsou spojitě nezáporné funkce na $[a, b)$. Jestliže $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} \in (0, \infty)$, pak $f \in \mathcal{N}(a, b)$ právě tehdy, když $g \in \mathcal{N}(a, b)$.

Příklady

Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci integrálů:

1. $\int_0^1 x^a dx$, kde $a \in \mathbb{R}$.

7. $\int_0^\infty \frac{x}{x^3 + 1} dx$

2. $\int_1^{+\infty} x^a dx$, kde $a \in \mathbb{R}$

8. $\int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x} dx$

3. $\int_0^\infty e^{ax} dx$ kde $a \in \mathbb{R}$

9. $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arccotg}^a x}{x^b} dx$

4. $\int_e^\infty \frac{\ln^a x}{x} dx$, $a \in \mathbb{R}$

10. $\int_1^{+\infty} \arctan \frac{x}{x^2 + 1} \ln^a x dx$

5. $\int_3^\infty \frac{x - 1}{x^2 + 2x} dx$

11. $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^4} dx$

6. $\int_1^\infty \frac{x + 5}{x^3 + 3x^2 - 1} dx$