17. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Věta. *Mějme mocninnou řadu* $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ *s poloměrem konvergence* $R > 0$. *Potom pro každé* x *takové, že* $|x - x_0| < R$ *platí, že*

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot k(x - x_0)^{k-1}.$$

Věta říká, že uvnitř konvergenčního kruhu lze derivovat řadu člen po členu. Věta platí v reálném i komplexním oboru.

Navíc platí, že derivovaná řada má stejný poloměr konvergence, jako původní řada.

Analogicky platí věta o integraci člen po členu.

Věta. *Mějme mocninnou řadu* $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ *s poloměrem konvergence* $R > 0$. *Potom pro každé* x *takové, že* $|x - x_0| < R$ *platí, že funkce* F *definovaná předpisem*

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{(x - x_0)^{k+1}}{k+1}$$

má v bodě x *derivaci rovnou* $F'(x) = f(x)$.

Věta (Abelova sumační metoda). *Nechť řada* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konverguje. Nechť* R *je poloměr konvergence mocninné řady* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$. *Potom platí*

$$\lim_{x \to R-} \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Abelovou sumační metodou nazýváme metodu, kdy z *libovolné* řady $\sum a_k$ uděláme mocninnou přidáním x^k o poloměru konvergence R a spočítáme limitu

$$\lim_{x \to R-} \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k.$$

Tím lze přiřadit součet i některým divergentním řadám! Máme ale zaručeno, že pokud řada $\sum_k a_k$ konverguje, pak jsme ji touto metodou sečetli správně.

Příklady

1. Derivováním člen po členu sečtěte následující řady (uvnitř kruhu konvergence).

   (a) $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots$

   (b) $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots$

2. Integrováním člen po členu sečtěte následující řady (uvnitř kruhu konvergence).

(a) $x + 2x^2 + 3x^3 + \dots$

(b) $x - 4x^2 + 9x^3 - 16x^4 + \dots$

(c) $1 \cdot 2x + 2 \cdot 3x^2 + 3 \cdot 4x^3 + \dots$

3. Najděte součet následujících řad.

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k+1)}{2^k}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k^3}{3^k}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$