16. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Věta 1 (Per partes pro určitý integrál)**.** Nechť funkce F je primitivní k f na (a, b), G je primitivní ke g na (a, b). Potom

$$\int_a^b gF = [GF]_a^b - \int_a^b Gf,$$

pokud je pravá strana definována.

Věta 2 (Substituce pro určitý integrál)**.** Nechť $\omega : (\alpha, \beta) \to (a, b)$ splňuje $\omega((\alpha, \beta)) = (a, b)$ a ω má vlastní nenulovou derivaci na (α, β). Potom

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta (f \circ \omega)(t)|\omega'(t)|\mathrm{d}t,$$

pokud alespoň jeden z integrálů existuje.

Příklady

(03) $\displaystyle\int_4^\infty \frac{x}{(x-1)(x-2)(x-3)}\,\mathrm{d}x$

(04) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{x}{x^3-1}\,\mathrm{d}x$

(25) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin x}{\cos^2 x + 1}\,\mathrm{d}x$

(29) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{e^x}{e^{2x} - 3e^x + 3}\,\mathrm{d}x$

(35) $\displaystyle\int_0^\pi \sin^2 x \cos^2 x\,\mathrm{d}x$

(40) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x}\,\mathrm{d}x$

(47) $\displaystyle\int_{-1}^1 x^2 e^{-x}\,\mathrm{d}x$

(44) $\displaystyle\int_{-\pi}^\pi \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin x}}\,\mathrm{d}x$

(49) $\displaystyle\int_0^1 \arccos{}^2 x\,\mathrm{d}x$

(48) $\displaystyle\int_0^1 x\arcsin x\,\mathrm{d}x$

(62) $\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$

(71) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{x+1}{x+0}}\,\mathrm{d}x$

(75) $\displaystyle\int_4^\infty \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x-2}{x-4}}\,\mathrm{d}x$

(88) $\displaystyle\int_0^{4\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\cos x 2 \sin x + 3}$

(95) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1 + \mathrm{tg}\ x}$