15. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Definice 1. Nechť $a, b \in R^*$, $a < b$. Nechť f je funkce definovaná na intervalu (a, b). Řekneme, že *funkce f má na intervalu (a, b) Newtonův integrál*, případně že *Newtonův integrál z funkce f na intervalu (a, b) existuje*, jestliže

- f má na (a, b) primitivní funkci F,
- existují limity $\lim_{x \to a_+} F(x)$ a $\lim_{x \to b_-} F(x)$ (nikoli nutně vlastní);
- rozdíl těchto dvou limit je definován jako prvek množiny R^*.

Věta 2 (Per partes pro určitý integrál)**.** Nechť funkce F je primitivní k f na (a, b), G je primitivní ke g na (a, b). Potom

$$\int_a^b gF = [GF]_a^b - \int_a^b Gf,$$

pokud je pravá strana definována.

Věta 3 (Substituce pro určitý integrál)**.** Nechť $\omega : (\alpha, \beta) \to (a, b)$ splňuje $\omega((\alpha, \beta)) = (a, b)$ a ω má vlastní nenulovou derivaci na (α, β). Potom

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta (f \circ \omega)(t)|\omega'(t)|\mathrm{d}t,$$

pokud alespoň jeden z integrálů existuje.

Příklady

1. (a) $\int_1^2 x^2 \,\mathrm{d}x$

   (b) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{tg}\,^2 x \,\mathrm{d}x$

   (c) $\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x}+3}$ + $\frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

   (d) $\int_a^b \mathrm{sgn} x \,\mathrm{d}x$, $a < 0$, $b > 0$

   (e) $\int_0^\infty \frac{1}{(x+3)^5}$

   (f) $\int_1^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x$

   (g) $\int_1^\infty \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x$

   (h) $\int_0^\infty \sin x \,\mathrm{d}x$

   (i) $\int_{-\infty}^0 e^x \,\mathrm{d}x$

   (j) $\int_1^\infty \frac{\arctan x}{1+x^2} \,\mathrm{d}x$

   (k) $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{e^x + e^{-x}} \,\mathrm{d}x$

   (l) $\int_{-1}^1 \ln|x| \,\mathrm{d}x$

   (m) $\int_2^3 \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} \,\mathrm{d}x$

   (n) $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx$

   (o) $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x}$

   (p) $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$