14. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

typ $R\left(x,\ \sqrt[m]{x+a}\right)$

Uvažme nejprve typ $R(x,\ \sqrt[m]{x+a})$, kde a je reálné číslo a m přirozené číslo ostře větší než 1. V takovém případě lze na intervalu $(-a,+\infty)$ použít substituci

$$t = \sqrt[m]{x}$$

s přihlédnutím ke vztahům

$$x = t^m, \qquad \mathrm{d}x = mt^{m-1}\,\mathrm{d}t.$$

Příklady

1. typ $R\left(x,\ \sqrt[m]{x+a}\right)$

   (a) $f(x) = \dfrac{1}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$.

   Řešení:
   Použijeme substituci $t = \sqrt[6]{x}$. Potom

   $$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \left(x^{1/6}\right)' = \frac{1}{6}x^{-5/6} = \frac{1}{6t^5},$$

   a tedy $\mathrm{d}x = 6t^5\,\mathrm{d}t$. Odtud vyplývá, že

   $$\int \frac{1}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{t^6(1+2t^3+t^2)}\,6t^5\,\mathrm{d}t = 6\int \frac{1}{t(1+t^2+2t^3)}\,\mathrm{d}t.$$

   Trojčlen ve jmenovateli má zřejmě kořen -1 a lze jej tedy rozložit na tvar $(t+1)(2t^2-t+1)$. Dále postupujeme rozkladem na parciální zlomky.

   $$\frac{1}{t(t+1)(2t^2-t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} + \frac{Ct+D}{2t^2-t+1}$$

   Přenásobením jmenovateli dostaneme

   $$1 = A(t+1)(2t^2-t+1) + Bt(2t^2-t+1) + (Ct+D)t(t+1).$$

   Dosazením $t=0$ a $t=-1$ dostaneme, že $A=1$ a $B=-\frac{1}{4}$. Porovnáním koeficientu u t^3 máme, že $2A+2B+C=0$, tedy $C=-2A-2B=-\frac{3}{2}$, a porovnáním koeficientů u lineárního členu máme, že $B+D=0$, tedy že $D=-B=\frac{1}{4}$. Odtud vyplývá, že

   $$\frac{1}{t(t+1)(2t^2-t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{4}\frac{1}{t+1} - \frac{1}{8}\frac{6t-1}{t^2-\frac{t}{2}+\frac{1}{2}}.$$

Integrály prvních dvou členů jsou zřejmé, poslední člen integrujeme dalším rozkladem na

$$\frac{1}{8}\frac{6t-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}{t^2-\frac{t}{2}+\frac{1}{2}}=\frac{3}{8}\frac{2t-\frac{1}{2}}{t^2-\frac{t}{2}+\frac{1}{2}}+\frac{1}{16}\frac{1}{t^2-\frac{t}{2}+\frac{1}{2}}.$$

První ze sčítanců pak lze integrovat substitucí jmenovatele, druhý podle vzorce (viz poznámku v příkladu **??**)

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{y^2+py+q}\overset{C}{=}\frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctan}\frac{2y+p}{\sqrt{4q-p^2}},\qquad \text{je-li}\ \ 4q>p^2.$$

Kombinací všech výsledků dostaneme, že

$$\int\frac{1}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x=6\int\frac{1}{t(1+t^2+2t^3)}\,\mathrm{d}t\overset{C}{=}$$

$$\overset{C}{=}6\ln t-\frac{6}{4}\ln(1+t)-\frac{18}{8}\ln\left(t^2-\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\right)-\frac{6}{16}\frac{2}{\sqrt{2-\frac{1}{4}}}\operatorname{arctan}\frac{2t-\frac{1}{2}}{\sqrt{2-\frac{1}{4}}}\overset{C}{=}$$

$$\overset{C}{=}6\ln t-\frac{3}{2}\ln(1+t)-\frac{9}{4}\ln\left(2t^2-t+1\right)-\frac{3}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctan}\frac{4t-1}{\sqrt{7}}=$$

$$=\ln x-\frac{3}{2}\ln(1+\sqrt[6]{x})-\frac{9}{4}\ln\left(2\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}+1\right)-\frac{3}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctan}\frac{4\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt{7}}.$$

Ve druhém řádku jsme použili fakt, že $\ln(g(t))\overset{C}{=}\ln(ag(t))$ pro každé $a>0$, tedy že rozšířením výrazu uvnitř logaritmu kladným číslem získáme až na konstantu stejný výraz (se stejným definičním oborem). Logaritmy ve výrazu můžeme ještě sjednotit do jednoho, například takto:

$$\frac{3}{4}\ln\frac{x\sqrt[3]{x}}{(1+\sqrt[6]{x})^2\left(2\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}+1\right)^3}-\frac{3}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctan}\frac{4\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt{7}}$$

(b) $f(x)=\dfrac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}$.

Řešení:

Použijeme substitutci $t=\sqrt[6]{x+1}$. Potom $\mathrm{d}x=6t^5\,\mathrm{d}t$ a

$$\int\frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\,\mathrm{d}x=\int\frac{1-t^3}{1+t^2}6t^5\,\mathrm{d}t.$$

Protože

$$(-t^8+t^5):(t^2+1)=-t^6+t^4+t^3-t^2-t+1+\frac{t-1}{1+t^2}$$

je

$$\int \frac{1-t^3}{1+t^2}\, 6t^5 \,\mathrm{d}t = 6\int \left(-t^6+t^4+t^3-t^2-t+1+\frac{1}{2}\frac{2t}{1+t^2}-\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t \overset{C}{=}$$

$$\overset{C}{=} -\frac{6}{7}t^7+\frac{6}{5}t^5+\frac{3}{2}t^4-2t^3-3t^2+6t+3\ln(1+t^2)-6\operatorname{arctan} t, \qquad t=\sqrt[6]{x+1}.$$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{(1+\sqrt[4]{x})^3\sqrt{x}}$.

Řešení:

Použijeme substituci $t=\sqrt[4]{x}$. Potom

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{4}x^{-3/4} = \frac{1}{4}t^{-3},$$

a tedy $\mathrm{d}x = 4t^3\,\mathrm{d}t$. Odtud

$$\int \frac{1}{(1+\sqrt[4]{x})^3\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{4t^3}{(1+t)^3t^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{4t}{(1+t)^3}\,\mathrm{d}t.$$

Rozklad na parciální zlomky hledáme ve tvaru

$$\frac{4t}{(1+t)^3} = \frac{A}{1+t}+\frac{B}{(1+t)^2}+\frac{C}{(1+t)^3}.$$

Přenásobením jmenovatelem dostaneme

$$4t = A(1+t)^2+B(1+t)+C,$$

odkud dosazením $t=-1$ dostáváme, že $C=-4$. Dále máme, že

$$4t = (A+B+C)+(2A+B)t+At^2,$$

odkud ihned máme, že $A=0$ a $B=4$. Tudíž

$$\int \frac{4t}{(1+t)^3}\,\mathrm{d}t = \int\left(\frac{4}{(1+t)^2}-\frac{4}{(1+t)^3}\right)\mathrm{d}t \overset{C}{=} -\frac{4}{1+t}+\frac{2}{(1+t)^2}$$

$$= -\frac{2+4t}{(1+t)^2} = -\frac{2+4\sqrt[4]{x}}{(1+\sqrt[4]{x})^2}.$$

2. typ $R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$

(a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$.

Řešení: Definičním oborem funkce f je interval $[1,+\infty)$, maximální otevřenou podmnožinou je interval $(1,+\infty)$. Primitivní funkci stačí určit na tomto intervalu.

Výraz nejprve upravíme vytknutím

$$\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+1} = \frac{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+1}$$

a poté použijeme substituci

$$t = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}},$$

odkud máme

$$x = -\frac{1+t^2}{1-t^2}, \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{2t(1-t^2)+2t(1+t^2)}{(1-t^2)^2} = \frac{4t}{(1+t^2)^2}.$$

Odtud vyplývá, že

$$\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{t-1}{t+1} \cdot \frac{4t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t =$$

standardním rozkladem na parciální zlomky dostaneme

$$= \int \left(\frac{2}{1+t} - \frac{2t-2)}{1+t^2} - \frac{4}{(1+t^2)^2} \right) \mathrm{d}t = \int \left(\frac{2}{1+t} - \frac{2t}{1+t^2} + \frac{2}{1+t^2} - \frac{4}{(1+t^2)^2} \right) \mathrm{d}t$$

druhý sčítanec integrujeme substitucí jmenovatele, čtvrtý například substitucí $t = \operatorname{tg} y$

$$\stackrel{C}{=} 2\ln|1+t| - \ln(1+t^2) + 2\arctan t - 2\arctan t - \frac{2t}{1+t^2} = \ln\frac{(1+t)^2}{1+t^2} - \frac{2t}{1+t^2},$$

zbývá dosadit za t.

(b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$.

Řešení:

Upravme

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}} = \frac{1}{(x-1)^2}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2/3}$$

a použijeme substituci

$$t = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{1/3}, \qquad x = \frac{t^3+1}{1-t^3}, \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{3t^2(1-t^3)+3t^2(1+t^3)}{(1-t^3)^2} = \frac{6t^2}{(1-t^3)^2}.$$

Odtud také vyplývá, že

$$x-1 = \frac{t^3+1}{1-t^3} - 1 = \frac{2t^3}{1-t^3}.$$

Dostáváme tak, že

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}} = \int \frac{1}{(x-1)^2}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2/3} \mathrm{d}x = \int \frac{(1-t^3)^2}{4t^6} \cdot t^2 \cdot \frac{6t^2}{(1-t^3)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int \frac{3}{2t^2}\,\mathrm{d}t \stackrel{C}{=} -\frac{3}{2t} = -\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}.$$

(c)

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

Řešení:

$$t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\mathrm{d}x = \frac{-4t}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t$$

tedy

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int t\frac{1+t^2}{1-t^2}\frac{-4t\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} = \int \frac{-4t^2\mathrm{d}t}{(1-t^2)(1+t^2)} = \int \frac{-2}{1-t^2} + \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t =$$
$$2\mathrm{arctan}\ t - \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|$$

Dosazení a podmínky nechány na čtenáři.

3. typ $R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$

(a)

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+2x+4}}\,\mathrm{d}x$$

Řešení: Substituce $\sqrt{x^2+2x+4} - \sqrt{1}x = t$

$$x = \frac{(t-2)(t+2)}{2(1-t)}$$

$$\mathrm{d}x = \frac{-t^2+2t-4}{2(1-t)^2}$$

čili

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+2x+4}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(t-2)(t+2)}{2(1-t)} \frac{1}{t+\frac{(t-2)(t+2)}{2(1-t)}} \frac{-t^2+2t-4}{2(1-t)^2}\mathrm{d}t =$$

$$\int \frac{1}{2}\frac{(t+2)(t-2)}{(1-t)^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int 1 + 2\frac{t-1}{(t-1)^2} - \frac{3}{(t-1)^2}\mathrm{d}t =$$

$$\frac{1}{2}\left(t + 2\ln|t-1| + \frac{3}{t-1}\right)$$

Zbytek práce na čtenáři.

(b)

$$f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{-x^2+x+2}}$$

Řešení: viz http://is.muni.cz/do/sci/UMS/el/analyza/pages/specialni-integracni-metody.html
374

(c)

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}}$$

Řešení: viz http://is.muni.cz/do/sci/UMS/el/analyza/pages/specialni-integracni-metody.html
375

(d)

$$f(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+x-1}}$$

Řešení: viz http://is.muni.cz/do/sci/UMS/el/analyza/pages/specialni-integracni-metody.html
376

4. Ostatní

(a) $f(x) = \dfrac{1}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}$. **Řešení:**
Použijeme substituci

$$t = \sqrt{x} + \sqrt{1+x}.$$

Potom

$$x = \left(\frac{t^2-1}{2t}\right)^2, \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2\cdot\frac{t^2-1}{2t}\cdot\frac{4t^2-2t^2+2}{4t^2} = \frac{t^2-1}{t}\cdot\frac{t^2+1}{2t^2}$$

a máme

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+t}\cdot\frac{(t^2-1)(t^2+1)}{2t^3}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \frac{(t-1)(t^2+1)}{t^3}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \frac{t^3-t^2+t-1}{t^3}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^3}\right) \mathrm{d}t \overset{C}{=} \frac{1}{2} \left(t - \ln|t| - \frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2}\right).$$