13. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Příklady

1. (a) $f(x) = \dfrac{1}{2\sin x - \cos x + 5}$.

Řešení: Funkce f je zřejmě spojitá na $\mathbb{R}$, a tudíž k ní na $\mathbb{R}$ existuje primitivní funkce. K jejímu nalezení použijeme substituci $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ na každém z intervalů $I_k = (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Podle transformačních vztahů máme, že na každém z intervalů I_k platí

$$\int \frac{1}{4t - 1 + t^2 + 5 + 5t^2}\,\mathrm{d}t == \int \frac{1}{3t^2 + 2t + 2}\,dt \overset{C}{=} \frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{3t+1}{\sqrt{5}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}}.$$

Můžeme tedy psát, že

$$F(x) = \int \frac{1}{2\sin x - \cos x + 5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}} + C_k, \qquad x \in I_k.$$

Zřejmě

$$\lim_{x \to (\pi + 2\pi k)-} F(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{5}} + C_k, \qquad \lim_{x \to (\pi + 2\pi k)+} F(x) = -\frac{\pi}{2\sqrt{5}} + C_{k+1}.$$

Z požadavku spojitosti na funkci F v bodě $(\pi + 2\pi k)$ tedy vyplývá, že

$$\frac{\pi}{2\sqrt{5}} + C_k = -\frac{\pi}{2\sqrt{5}} + C_{k+1}$$

odkud ihned máme, že

$$C_{k+1} = \frac{\pi}{\sqrt{5}} + C_k.$$

Tato podmínka volbou jedné libovolné z konstant C_k určuje všechny ostatní. Například indukcí lze lehko ukázat, že

$$C_k = \frac{\pi k}{\sqrt{5}} + C_0, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Pro funkci F tedy můžeme psát

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}} + \frac{\pi k}{\sqrt{5}} + C_0, & x \in (-\pi + 2\pi k, \pi + 2\pi k) \\ \frac{(2k+1)\pi}{2\sqrt{5}} + C_0, & x = \pi + 2\pi k \end{cases}$$

Protože víme, že $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in \cup_{k\in\mathbb{Z}} I_k$, z věty o limitě derivace díky spojitosti funkce f na $\mathbb{R}$ vyplývá, že $F'(x) = f(x)$ i ve styčných bodech jednotlivých intervalů, tedy na celém $\mathbb{R}$.

(b)

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}$$

Řešení: substituce $t = \mathrm{tg}\ \frac{x}{2}$

$$\mathrm{d}x = \frac{2\mathrm{d}t}{t^2+1}$$
$$\sin x = \frac{2t}{t^2+1}$$

tedy

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x} = \int \frac{2\mathrm{d}t}{t^2+1} \frac{1}{1+\frac{2t}{t^2+1}} = \int \frac{2\mathrm{d}t}{t^2+2t+1} = \int \frac{2\mathrm{d}t}{(t+1)^2} = -2\frac{1}{t+1}$$

Zpětná substituce:

$$F(x) := -2\frac{1}{\mathrm{tg}\ \frac{x}{2}+1}$$

a to na intervalu $(-\pi;\pi)+2k\pi$, to je ze substituce $\mathrm{tg}\ \frac{x}{2}$. Dále máme podmínky, $\sin x \neq -1$, tedy $x \neq -\pi/2 + 2k\pi$. Také máme podmínky $\mathrm{tg}\ \frac{x}{2} \neq -1$, které ale dávají stejnou podmínku na $x \neq -\pi/2$.
A jdeme lepit (VOLSF):

$$\lim_{x\to\pi-} F(x) = 0$$
$$\lim_{x\to-\pi+} F(x) = 0$$

takže nemusíme funkce nijak posouvat a je třeba dodefinovat krajní body, udělat podmínky a připojit konstantu.

$$\tilde{F}(x) = \begin{cases} -2\frac{1}{\mathrm{tg}\ \frac{x}{2}+1} + c & x \in (-\pi+2k\pi;\pi+2k\pi) \setminus \{-\pi/2+2k\pi\} \\ 0+c & x = \pi + 2k\pi \end{cases}$$

V bodech $-\pi/2$ nelepíme, primitivní funkce tam vůbec není definovaná a ani původní integrál tam nedává smysl.
Na závěr se ještě podíváme na substituci. Je druhého typu (vyjadřujeme $\mathrm{d}x$). $\phi^{-1}(t) = \mathrm{tg}\ \frac{x}{2}$, tedy $\phi : x = 2\arctan t$. Tedy ϕ je z $\mathbb{R}$ do $(-\pi,\pi)$, což nám zároveň dává intervaly, na nichž jsme získali primitivní funkci. (Nezapomene aplikovat podmínky, $t \neq -1$.)
Věta o substituci říká, na jakých intervalech máme primitivní funkci a kde ji máme lepit. Ne, že by nás to nenapadlo bez ní, ale věta říká, že to děláme legálně.

(c)

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{2-\sin x}$$

Řešení: Jako výše, $t = \mathrm{tg}\ \frac{x}{2}$. Máme

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{2-\sin x} = \int \frac{2\mathrm{d}t}{t^2+1} \cdot \frac{1}{2-\frac{2t}{t^2+1}} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-t+1} =$$
$$\int \frac{4}{3} \frac{\mathrm{d}t}{\left(\frac{t-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{arctan}\ \frac{2t-1}{\sqrt{3}}$$

Zpětná substituce:

$$F(x) := \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{arctan}\ \frac{2\mathrm{tg}\ \frac{x}{2}-1}{\sqrt{3}}$$

na intervalu (viz výše) $(-\pi, \pi) + 2k\pi$
Lepení (VOLSF):

$$\lim_{x\to\pi-} F(x) = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$
$$\lim_{x\to-\pi+} F(x) = -\frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

Tedy budeme posouvat o $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ a dodefinujeme v krajních bodech pomocí právě zjištěných limit, přidáme konstantu.
Celkem máme:

$$\tilde{F}(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{arctan}\ \frac{2\mathrm{tg}\ \frac{x}{2}-1}{\sqrt{3}} + k\pi\frac{2}{\sqrt{3}} + c & x \in (-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi) \\ \frac{\pi}{\sqrt{3}} + k\pi\frac{2}{\sqrt{3}} + c & x = \pi + 2k\pi \end{cases}$$

Podmínky substituce jsou stejné, jako u prvního příkladu.

(d)

$$\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$$

Řešení: Funkce je sudá v obou proměnných, tedy $t = \mathrm{tan} x$, $\sin^2 x = \frac{t^2}{t^2+1}$, $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$. Máme:

$$\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{t^2}{t^2+1}}{1+\frac{t^2}{t^2+1}} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \int \frac{t^2}{(1+t^2)(2t^2+1)}\mathrm{d}t =$$
$$\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} - \int \frac{\mathrm{d}t}{2t^2+1} = \mathrm{arctan}\ t - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctan}\ \sqrt{2}t$$

Tedy

$$F(x) = \text{arctan tan}x - \frac{1}{\sqrt{2}}\text{arctan } \sqrt{2}\text{tan}x$$

Tangens je definován na $(-\pi/2; \pi/2)$, tedy k lepení potřebujeme

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} F(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\pi}{2} = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to\frac{-\pi}{2}+} F(x) = -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\pi}{2} = -\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)\frac{\pi}{2}$$

Celkem:

$$\tilde{F}(x) = \begin{cases} \text{arctan tan}x - \frac{1}{\sqrt{2}}\text{arctan } \sqrt{2}\text{tan}x + k\pi\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + c \\ \qquad x \in (-\pi/2 + k\pi; \pi/2 + 2\pi) \\ \frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + k\pi\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + c & x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$$

Substituce byla 2. typu. $\phi : x = \arctan t$ je definována na $\mathbb{R}$, zobrazuje do $(-\pi/2; \pi/2)$, kde je pak také definovaná primitivní funkce.

(e) $f(x) = \dfrac{1 + \sin x}{2 + \cos x}$

Řešení:

Ilja Černý

str. 154, př. 9.11b

(f) $f(x) = \dfrac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x + 4\cos^2 x}$

Řešení: Ilja Černý

str. 155, př. 9.11c

(g) $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}$

Řešení: Ilja Černý

str. 139, př. 9.6

(h) $f(x) = \dfrac{1}{\sin x + 2}$

Řešení:

Holicky Kalenda str. 25

2. (a) $f(x) = \max\{1, x^2\}$

Řešení:

http://is.muni.cz/do/sci/UMS/el/analyza/pages/zakladni-integracni-metody.html
346

(b) $f(x) = \sqrt{x^6}$

Řešení:

Platí, že $\sqrt{x^6} = |x^3|$. Na intervalu $x \in (0, +\infty)$ platí, že

$$\int \sqrt{x^6}\, dx = \int x^3\, dx = \frac{x^4}{4} + C_1$$

Na intervalu $x \in (-\infty, 0)$ platí, že

$$\int \sqrt{x^6}\, dx = \int (-x^3)\, dx = -\frac{x^4}{4} + C_2$$

Primitivní funkce ovšem existuje na celém $\mathbb{R}$, pokud se obě funkce shodují v bodě 0, tedy pokud $C_1 = C_2$ (princip lepení). Primitivní funkce jsou tedy určeny vztahy

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{x^4}{4} + C & x < 0 \\ C & x = 0 \\ \frac{x^4}{4} + C & x > 0 \end{cases}$$

kde C značí všude stejnou konstantu, avšak libovolně volenou.

(c) $f(x) = |\sin x|$

Řešení:

Protože f je spojitá na $\mathbb{R}$, má také na $\mathbb{R}$ primitivní funkci. Tudíž má také primitivní funkci na všech otevřených podmnožinách $\mathbb{R}$ a tato primitivní funkce musí být ve všech bodech spojitá, neboť má ve všech bodech vlastní derivaci $|\sin x|$.

Nejprve určíme neurčitý integrál k f na intervalech $(0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$ a $(\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi)$, kde k je libovolné celé číslo. Protože

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & x \in (0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi) \\ -\sin x & x \in (\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi) \end{cases}$$

platí, že libovolná primitivní funkce k funkci f na $\mathbb{R}$ má tvar

$$F(x) = \begin{cases} -\cos x + A_k & x \in (0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi) \\ \cos x + B_k & x \in (\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi) \end{cases}$$

kde A_k, B_k jsou konstanty. V bodech $2k\pi$ je potřeba zajistit, aby funkce F byla spojitá, a tudíž limita zleva byla rovna limitě zprava. Z toho vyplývá, že

$$-\cos x + A_k = \cos x + B_{k-1} \qquad \text{pro } x = 2k\pi \implies -1 + A_k = 1 + B_{k-1}$$
$$\implies A_k = 2 + B_{k-1}$$
$$-\cos x + A_k = \cos x + B_k \qquad \text{pro } x = \pi + 2k\pi \implies 1 + A_k = -1 + B_k$$
$$\implies B_k = A_k + 2 = 4 + B_{k-1}$$

Z toho vyplývá, že funkce F je jednoznačně určena volbou kterékoliv konstanty A_k nebo B_k pro jedno libovolně volené celé číslo k.

(d) $f(x) = \sqrt{1 - \sin 2x}$

Řešení:

Sledujte výpočet.

$$\int \sqrt{1-\sin 2x}\ \mathrm{d}x = \int \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x - 2\sin x\cos x}\ \mathrm{d}x$$

$$= \int \sqrt{(\cos x - \sin x)^2}\ \mathrm{d}x = \int |\cos x - \sin x|\ \mathrm{d}x$$

Nyní hledejme primitivní funkci zvlášť na intervalu $(0, \frac{\pi}{4})$, kde

$$\int |\cos x - \sin x|\ \mathrm{d}x = \int (\cos x - \sin x)\ \mathrm{d}x = \sin x + \cos x + C_1$$

a na intervalu $(\frac{\pi}{4}, \pi)$, kde

$$\int |\cos x - \sin x|\ \mathrm{d}x = \int (\sin x - \cos x)\ \mathrm{d}x = -\cos x - \sin x + C_2.$$

Abychom dostali primitivní funkci na celém intervalu $(0, \pi)$, musíme zajistit, aby v bodě $\frac{\pi}{4}$ byla spojitá, tedy aby platilo

$$\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} + C_1 = -\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4} + C_2$$

$$\sqrt{2} + C_1 = -\sqrt{2} + C_2$$

$$C_2 = 2\sqrt{2} + C_1.$$

Volbou jedné z konstant C_1 nebo C_2 je tedy primitivní funkce jednoznačně určena. Naopak, jednu z těchto konstant můžeme volit zcela libovolně.

Je možné ověřit, že nalezená funkce je v bodě $\frac{\pi}{4}$ je diferencovatelná (výpočtem derivace zleva a zprava pomocí limity) a derivace má správnou hodnotu. Není to ale nutné, protože funkce f je spojitá na $(0, \pi)$ a primitivní funkce tedy existovat musí, je nutně spojitá (neboť má vlastní derivaci v každém bodě) a na intervalech $(0, \pi/4)$ a $(\pi/4, \pi)$ je až na konstantu určena jednoznačně nalezenými vztahy. Dodefinovat ji v $\pi/4$ lze díky požadavku spojitosti pouze jedním způsobem.