12. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Buď $R(\cdot,\cdot)$ racionální funkce dvou proměnných.

1. Jestliže $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, potom lze užít substituci $t = \sin x$.
2. Jestliže $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, potom lze užít substituci $t = \cos x$.
3. Jestliže $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, potom lze užít substituci $t = \operatorname{tg} x$, je-li $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, kde k je celé číslo. Transformační vztahy jsou

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}, \qquad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \qquad \sin x \cos x = \frac{t}{1+t^2} \tag{1}$$

4. Vždy lze užít substituci $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, , je-li $x \in (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, kde k je celé číslo. Pokud ale lze užít některou z výše uvedených substitucí, dáváme jí přednost. Transformační vztahy mají podobu

$$\mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}, \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}. \tag{2}$$

Příklady

1. $f(x) = \dfrac{3\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x + 3\cos^2 x}$

Řešení:

Použijeme substituci $t = \operatorname{tg} x$. Pak platí, že

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = (\operatorname{tg}^2 x + 1)\, dx = (t^2+1)\, dx \implies dx = \frac{dt}{t^2+1}$$

Dostáváme tak, že

$$\int \frac{3\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x + 3\cos^2 x}\, dx = \int \frac{3t^2+1}{t^2+3}\frac{1}{t^2+1}\, dt =$$

který dále řešíme rozkladem na parciální zlomky. Ve zlomku

$$\frac{3t^2+1}{(t^2+3)(t^2+1)}$$

formálně pišme y místo t^2. Pak podle věty o rozkladu na parciální zlomky máme, že

$$\frac{3y+1}{(y+3)(y+1)} = \frac{A}{y+3} + \frac{B}{y+1}$$

$$3y+1 = A(y+1) + B(y+3)$$

a dosazením $y = -1$ dostaneme, že $B = -1$, dosazením $y = -3$ dostaneme, že $A = 4$. Platí tedy, že

$$\frac{3t^2+1}{(t^2+3)(t^2+1)} = \frac{4}{t^2+3} - \frac{1}{t^2+1}$$

Nyní dokončíme integraci

$$= \int \frac{3t^2+1}{t^2+3}\frac{1}{t^2+1}\,dt = \int \left(\frac{4}{t^2+3} - \frac{1}{t^2+1}\right) dt \overset{C}{=} \frac{4}{\sqrt{3}}\text{arctan } \frac{t}{\sqrt{3}} - \text{arctan } t$$
$$= \frac{4}{\sqrt{3}}\text{arctan } \frac{\text{tg } x}{\sqrt{3}} - x$$

2. $f(x) = \text{tg }^5 x$

Řešení: Použijeme substituci $t = \text{tg } x$. Pak platí, že

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = (\text{tg }^2 x + 1)\,dx = (t^2+1)\,dx \implies dx = \frac{dt}{t^2+1}$$

Dostáváme tak

$$\int \text{tg }^5 x\,dx = \int \frac{t^5}{t^2+1}\,dt = \int \left(t^3 - t + \frac{t}{t^2+1}\right) dt \overset{C}{=} \frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}\ln(1+t^2)$$
$$= \frac{1}{4}\text{tg }^4 x - \frac{1}{2}\text{tg }^2 x + \frac{1}{2}\ln(1+\text{tg }^2 x)$$

3. $f(x) = \dfrac{\sin x}{1+\sin x}$

Řešení: Použijeme substituci $t = \text{tg } \frac{x}{2}$. Pak platí, že

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{\text{tg }^2 \frac{x}{2} + 1}{2} = \frac{t^2+1}{2} \implies dx = \frac{2\,dt}{t^2+1}$$

a dále platí

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\text{tg }\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2\text{tg }\frac{x}{2}}{1+\text{tg }^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{t^2+1}$$

Dostáváme tak, že

$$\int \frac{\sin x}{1+\sin x}\,dx = \int \frac{2t}{t^2+1}\cdot\frac{1}{1+\frac{2t}{t^2+1}}\cdot\frac{2}{t^2+1}\,dt = \int \frac{4t}{(t^2+1)(t^2+2t+1)}\,dt$$
$$= \int \frac{4t}{(t^2+1(t+1)^2}\,dt =$$

a nyní postupujeme rozkladem na parciální zlomky, který hledáme ve tvaru

$$\frac{4t}{(t^2+1)(t+1)^2} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{(t+1)^2} + \frac{Ct+D}{t^2+1}$$

Odkud přenásobením vyplývá

$$4t = A(t+1)(t^2+1) + B(t^2+1) + (Ct+D)(t+1)^2$$

Dosazením $t=-1$ dostaneme, že $B=-2$. Dosazením $t=i$ dostaneme

$$4i = (Ci+D)(1+i)^2 = (Ci+D)\cdot 2i$$

$$2 = Ci + D$$

odkud plyne, že $C=0$ a $D=2$. Zpětným dosazením dostaneme

$$4t = A(t+1)(t^2+1) - 2(t^2+1) + 2(t+1)^2$$

a porovnáním absolutním členů vidíme, že $0 = A-2+2$, tedy, že $A=0$. Hledaný rozklad má tedy tvar

$$\frac{4t}{(t^2+1)(t+1)^2} = -\frac{2}{(t+1)^2} + \frac{2}{t^2+1}$$

Dokončeme integraci.

$$= \int \frac{4t}{(t^2+1)(t+1)^2} = -\int \frac{2}{(t+1)^2}\,dt + \int \frac{2}{t^2+1}\,dt \stackrel{C}{=} \frac{2}{t+1} + 2\operatorname{arctan} t = \frac{2}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + x$$

4. $f(x) = \dfrac{1}{\cos x \sin^3 x}$

Řešení: Protože $f(\sin x, \cos x) = f(-\sin x, -\cos x)$, použijeme substituci $t = \operatorname{tg} x$. Protože

$$\frac{dx}{\cos x \sin^3 x} = \frac{dx}{\cos^2 x}\frac{1}{\operatorname{tg} x}\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{dt}{t}\left(1+\frac{1}{t^2}\right) = \frac{t^2+1}{t^3}\,dt$$

dostáváme

$$\int \frac{dx}{\cos x \sin^3 x} = \int \frac{t^2+1}{t^3}\,dt \stackrel{C}{=} \ln|t| - \frac{1}{2}t^2 = \ln|\operatorname{tg} x| - \frac{1}{2\operatorname{tg}^2 x}$$

Podotkněme, že platí

$$\frac{\cos^2 x}{2\sin^2 x} \stackrel{C}{=} \frac{\cos^2 x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{2\sin^2 x} = \frac{1}{2\sin^2 x}$$

5. $f(x) = \dfrac{\sin^3 x}{1 + 4\cos^2 x + 3\sin^2 x}$

   Řešení:

   http://is.muni.cz/do/sci/UMS/el/analyza/pages/specialni-integracni-metody.html
   392

6. $f(x) = \dfrac{1}{1 + \sin^2 x}$

   Řešení:

   393

7. $f(x) = \dfrac{1}{2 - \cos x}$

   Řešení: 396

8. $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sin x - \cos x}$

   Řešení: 399

9. $f(x) = \dfrac{2 - \sin x}{2 + \cos x}$

   Řešení: 400

10. $f(x) = \dfrac{\cos^3 x}{2 - \sin x}$

    Řešení: 398