

## 12. cvičení

<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/>  
kytaristka@gmail.com

### Teorie

Bud'  $R(\cdot, \cdot)$  racionální funkce dvou proměnných.

1. Jestliže  $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ , potom lze užít substituci  $t = \sin x$ .
2. Jestliže  $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ , potom lze užít substituci  $t = \cos x$ .
3. Jestliže  $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ , potom lze užít substituci  $t = \operatorname{tg} x$ , je-li  $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ , kde  $k$  je celé číslo. Transformační vztahy jsou

$$dx = \frac{dt}{t^2 + 1}, \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1 + t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1 + t^2}, \quad \sin x \cos x = \frac{t}{1 + t^2} \quad (1)$$

4. Vždy lze užít substituci  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ , je-li  $x \in (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$ , kde  $k$  je celé číslo. Pokud ale lze užít některou z výše uvedených substitucí, dáváme jí přednost. Transformační vztahy mají podobu

$$dx = \frac{2 dt}{1 + t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}. \quad (2)$$

### Příklady

1.  $f(x) = \frac{3 \sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x + 3 \cos^2 x}$

6.  $f(x) = \frac{1}{1 + \sin^2 x}$

2.  $f(x) = \operatorname{tg}^5 x$

7.  $f(x) = \frac{1}{2 - \cos x}$

3.  $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \sin x}$

8.  $f(x) = \frac{\sin x}{\sin x - \cos x}$

4.  $f(x) = \frac{1}{\cos x \sin^3 x}$

9.  $f(x) = \frac{2 - \sin x}{2 + \cos x}$

5.  $f(x) = \frac{\sin^3 x}{1 + 4 \cos^2 x + 3 \sin^2 x}$

10.  $f(x) = \frac{\cos^3 x}{2 - \sin x}$