7. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Věta 1 (první věta o substituci)**.** Nechť $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $\alpha < \beta$. Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b). Nechť φ je funkce definovaná na intervalu (α, β) s hodnotami v (a, b), která má v každém bodě (α, β) vlastní derivaci. Pak

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t \overset{C}{=} F(\varphi(t)), \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Příklady

Určete primitivní funkci k funkci $f(x)$ na otevřené podmnožině jejího definičního oboru, kde primitivní funkce existuje.

1. $f(x) = \dfrac{x}{3 - 2x^2}$

   Řešení: Použijeme substituci $y = 3 - 2x^2$. Potom $dy = -4x\,dx$ a platí

$$\int \frac{x}{3 - 2x^2}\,dx = -\frac{1}{4}\int \frac{dy}{y} \overset{C}{=} -\frac{1}{4}\ln|y| = -\frac{1}{4}\ln|3 - 2x^2|$$

2. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$

   Řešení: Použijeme substituci $y = 1 - x^2$. Pak $dy = -2x\,dx$ a platí

$$\int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{dy}{\sqrt{y}} \overset{C}{=} -\sqrt{y} = -\sqrt{1 - x^2}$$

3. $f(x) = xe^{-x^2}$

   Řešení: Použijeme substituci $y = -x^2$. Potom $dy = -2x\,dx$ a platí

$$\int xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int e^y\,dy \overset{C}{=} -\frac{1}{2}e^y = -\frac{1}{2}e^{-x^2}$$

4. $f(x) = \dfrac{x}{(1 + x^2)^2}$

   Řešení: Použijeme substituci $y = 1 + x^2$. Potom $dy = 2x\,dx$ a platí

$$\int \frac{x}{(1 + x^2)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y^2} \overset{C}{=} -\frac{1}{2}\frac{1}{y} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1 + x^2}$$

5. $f(x) = \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$

Řešení: Použijeme substituci $y = \frac{1}{x}$. Potom $dy = -\frac{1}{x^2}\,dx$ a platí

$$\int \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}\,dx = -\int \sin y\,dy \stackrel{C}{=} \cos y = \cos \frac{1}{x}$$

6. $f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$

Řešení: Použijeme substituci $y = \ln x$. Pak $dy = \frac{1}{x}\,dx$ a platí

$$\int \frac{\ln^2 x}{x}\,dx = \int y^2\,dy \stackrel{C}{=} \frac{y^3}{3} = \frac{\ln^3 x}{3}$$

7. $f(x) = \sin^5 x \cos x$.

Řešení: Použijeme substituci $y = \sin x$. Pak $dy = \cos x\,dx$ a platí

$$\int \sin^5 x \cos x\,dx = \int y^5\,dy \stackrel{C}{=} \frac{y^6}{6} = \frac{\sin^6 x}{6}$$

8. $f(x) = \frac{e^x}{2 + e^x}$

Řešení: Použijeme substituci $y = e^x$. Potom $dy = e^x\,dx$ a platí

$$\int \frac{e^x}{2 + e^x}\,dx = \int \frac{dy}{2 + y} \stackrel{C}{=} \ln|2 + y| = \ln(2 + e^x)$$

9. $f(x) = \frac{\arctan\,x}{1 + x^2}$

Řešení: Použijeme substituci $y = \arctan\,x$, potom $dy = \frac{1}{1+x^2}\,dx$ a platí

$$\int \frac{\arctan\,x}{1 + x^2}\,dx = \int y\,dy \stackrel{C}{=} \frac{y^2}{2} = \frac{\arctan\,{}^2 x}{2}$$

10. $f(x) = \mathrm{tg}\;x$

Řešení: Použijeme substituci $y = \cos x$. Potom $dy = -\sin x\,dx$ a platí

$$\int \mathrm{tg}\;x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{dy}{y} \stackrel{C}{=} -\ln|y| = -\ln|\cos x|$$

11. $f(x) = \frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)}$

Řešení: Použijeme substituci $y = \ln(\ln x)$. Potom $dy = \frac{1}{x \ln x}\,dx$ a platí

$$\int \frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)}\,dx = \int \frac{1}{y}\,dy \stackrel{C}{=} \ln|y| = \ln(|\ln(\ln x)|)$$

12. $f(x) = \dfrac{x}{4+x^4}$

Řešení: Použijeme substituci $y = x^2$. Potom $dy = 2x\,dx$ a platí

$$\int \frac{x}{4+x^4}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{4+y^2} = \frac{1}{8}\int \frac{dy}{1+(y/2)^2} \overset{C}{=} \frac{1}{4}\text{arctan}\ \frac{y}{2} = \frac{1}{4}\text{arctan}\ \frac{x^2}{2}$$

13. $f(x) = \dfrac{1}{(\arcsin\ x)^2\sqrt{1-x^2}}$

Řešení: Použijeme substituci $y = \arcsin\ x$, potom $dy = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ a platí

$$\int \frac{1}{(\arcsin\ x)^2\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{dy}{y^2} \overset{C}{=} -\frac{1}{y} = -\frac{1}{\arcsin\ x}$$

14. $f(x) = \cos^3 x$

Řešení: Použijeme substituci $y = \sin x$. Potom $dy = \cos x\,dx$ a platí

$$\int \cos^3 x\,dx = \int (1-\sin^2 x)\cos x\,dx = \int (1-y^2)\,dy \overset{C}{=} y - \frac{y^3}{3} = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3}$$

15. $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$

Řešení: Použijeme substituci $y = \sqrt{x}$. Potom $y^2 = x$, $dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$ a platí

$$\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\,dx = 2\int \frac{1}{1+x}\frac{dx}{2\sqrt{x}} = 2\int \frac{1}{1+y^2}\,dy \overset{C}{=} 2\text{arctan}\ y = 2\text{arctan}\ \sqrt{x}$$

16. $f(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}}$

Řešení: Použijeme substituce $y = \sin x - \cos x$. Potom $dy = \cos x + \sin x$ a platí

$$\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}}\,dx = \int \frac{dy}{y^{1/3}} \overset{C}{=} \frac{3}{2}y^{2/3} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{(\sin x - \cos x)^2} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{1-\sin 2x}$$

17. $f(x) = \dfrac{1}{e^x + e^{-x}}$

Řešení: Vztah upravíme a použijeme substituci $y = e^x$, $dy = e^x\,dx$

$$\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx = \int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \int \frac{dy}{1+y^2} \overset{C}{=} \text{arctan}\ y = \text{arctan}\ e^x$$

18. $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}}$

Řešení: Použijeme substituci $y = \cos x$. Pak $dy = -\sin x\,dx$ a platí

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}}\,dx = -\int \frac{dy}{\sqrt{y^3}} \overset{C}{=} 2y^{-1/2} = \frac{2}{\sqrt{\cos x}}$$

19. $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2+1}}$

Řešení: Použijeme substituci $y = \sqrt{x^2+1}$. Potom $dy = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ a $y^2 - 1 = x^2$ a platí

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int \frac{1}{x^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int \frac{1}{y^2-1}\,dy = -\int \frac{1}{1-y^2}\,dy \overset{C}{=} -\frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y} =$$

$$-\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{1-\sqrt{x^2+1}}$$

20. $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$

Řešení: Použijeme substituci $y = \cos x$. Potom $dy = -\sin x\,dx$ a platí

$$\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}\,dx = \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}\,dx = -\int \frac{dy}{1-y^2} \overset{C}{=} -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right| = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}}\right| = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$$

21. $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x\sqrt[4]{\operatorname{cotg} x}}$

Řešení:

Použijeme substituci $y = \operatorname{cotg} x$. Potom $dy = -\frac{1}{\sin^2 x}\,dx$ a platí

$$\int \frac{1}{\sin^2 x\sqrt[4]{\operatorname{cotg} x}}\,dx = -\int \frac{dy}{y^{1/4}} \overset{C}{=} \frac{4}{3}y^{3/4} = \frac{4}{3}\sqrt[4]{\operatorname{cotg}^3 x}$$

22. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$

Řešení: Použijeme substituci $y = \sqrt{x}$. Potom $y^2 = x$, $dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$ a platí

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx = 2\int \frac{1}{\sqrt{1-x}}\frac{dx}{2\sqrt{x}} = 2\int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy \overset{C}{=} \arcsin y = \arcsin\sqrt{x}$$

23. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}$

Řešení: Nejprve použijeme substituci $y = e^x$, $dy = e^x\,dx$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}\,dx = \int \frac{e^x\,dx}{e^x\sqrt{1+e^{2x}}} = \int \frac{dy}{y\sqrt{1+y^2}} \overset{C}{=}$$

a poté postupujeme jako v příkladu (**??**)

$$\overset{C}{=} -\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{y^2+1}}{1-\sqrt{y^2+1}} = -\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{e^{2x}+1}}{1-\sqrt{e^{2x}+1}}$$

24. $f(x) = \operatorname{cotg} x$

Řešení: Použijeme substituci $y = \sin x$. Potom $dy = \cos x\, dx$ a platí

$$\int \operatorname{cotg} x\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx = \int \frac{dy}{y} \stackrel{C}{=} \ln|y| = \ln|\sin x|$$

25. $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$

Řešení: Použijeme substituci $y = \sin x$. Potom $dy = \cos x\, dx$ a platí

$$\int \frac{1}{\cos x}\, dx = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x}\, dx = \int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}\, dx = \int \frac{dy}{1-y^2} \stackrel{C}{=} \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right|$$

Řešení: Použijeme substituci $y = \sin x$. Pak platí

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin x}\, dx = \int \frac{\cos^2 x\, \cos x}{\sin x}\, dx = \int \frac{(1-\sin^2 x)}{\sin x}\, \cos x\, dx =$$

$$= \int \frac{1-y^2}{y}\, dy = \int \frac{1}{y}\, dy - \int y\, dy \stackrel{C}{=} \ln|y| - \frac{y^2}{2} = \ln|\sin x| - \frac{\sin^2 x}{2}$$