6. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Příklady

1. $f(x) = (1 + \sin x + \cos x)$

   Řešení: Sledujte výpočet

$$\int (1 + \sin x + \cos x)\, dx = x - \cos x + \sin x + C.$$

2. $f(x) = (1 - x)(1 - 2x)(1 - 3x)$

   Řešení: Roznásobením

$$\int (1-x)(1-2x)(1-3x)\, dx = \int (1-6x+11x^2-6x^3)\, dx = x-3x^2+\frac{11}{3}x^3-\frac{3}{2}x^4+C.$$

3. $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$

   Řešení: Sledujte výpočet

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\, dx = \int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx = \int \left(x^{1/2} + x^{-1/2}\right) dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{x^{1/2}}{1/2} + C.$$

4. $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$

   Řešení: Sledujte výpočet

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}\, dx = \int \frac{(1+x^2)-1}{1+x^2}\, dx = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = x - \arctan\, x + C.$$

5. $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x^2-1}$

   Řešení: Sledujte výpočet

$$\int \frac{x^2+3}{x^2-1}\, dx = \int \frac{x^2-1+4}{x^2-1}\, dx = \int \left(1 + \frac{4}{x^2-1}\right) dx = \int \left(1 - \frac{4}{1-x^2}\right) dx = x-2\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C.$$

6. $f(x) = (e^{-x} + e^{-2x})$

   Řešení: Pomocí lineární substituce $y = -x$, resp. $y = -2x$ dostaneme

$$\int (e^{-x} + e^{-2x})\, dx \overset{C}{=} -e^{-x} - \frac{1}{2}e^{-2x}$$

7. $f(x) = (3 - x^2)^3$

Řešení: Zřejmě

$$\int (3 - x^2)^3 \, dx = \int (27 - 9x^2 + 3x^4 - x^6) \, dx = 27x - 3x^3 + \frac{3}{5}x^5 - \frac{x^7}{7} + C.$$

8. $f(x) = (\sin 5x - \sin 5\alpha)$

Řešení: Pomocí lineární substituce $y = 5x$ dostaneme

$$\int (\sin 5x - \sin 5\alpha) \, dx = -\frac{1}{5} \cos 5x - x \sin 5\alpha,$$

neboť $\sin 5\alpha$ je konstantní funkce (nezávislá na proměnné x).

9. $f(x) = \dfrac{1}{x + A}$

Řešení: Víme, že primitivní funkce k funkci $\frac{1}{x}$ je $\ln |x| + C$. Podle příkladu (**??**) tedy primitivní funkce k funkci $\frac{1}{ax+b}$ je $\frac{1}{a} \ln |ax + b| + C$. Odtud vyplývá, že (položte $a = 1$, $b = A$)

$$\int \frac{1}{x + A} \, dx = \ln |x + A| + C.$$

10. $f(x) = \dfrac{1}{2 + 3x^2}$

Řešení: Výraz převedeme na tvar $\frac{1}{1+c^2x^2}$ a poté užijeme substituci $y = cx$.

$$\int \frac{1}{2 + 3x^2} \, dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1 + \left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2} \, dx \overset{C}{=} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} \text{arctan} \sqrt{\frac{3}{2}}x = \sqrt{\frac{1}{6}} \text{arctan} \sqrt{\frac{3}{2}}x$$

11. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2 - 5x}}$

Řešení: Protože je

$$\int \frac{1}{\sqrt{y}} \, dy = 2\sqrt{y},$$

platí

$$\int \frac{1}{\sqrt{2 - 5x}} \, dx \overset{C}{=} \frac{1}{-5} \cdot 2\sqrt{2 - 5x} = -\frac{2}{5}\sqrt{2 - 5x}$$

12. $f(x) = (2x - 3)^{10}$

Řešení: Je

$$\int y^{10} \, dy = \frac{y^{11}}{11} + C.$$

Podle příkladu (**??**) o lineární substituci je

$$\int (2x - 3)^{10} \, dx = \frac{1}{2} \frac{(2x - 3)^{11}}{11} + C.$$

13. $f(x) = \operatorname{cotg}^2 x$

Řešení: Sledujte výpočet

$$\int \operatorname{cotg}^2 x\,dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\,dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}\,dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right)dx = -\operatorname{cotg} x - x + C.$$

14. $f(x) = \operatorname{tg}^2 x$

Řešení: Sledujte výpočet

$$\int \operatorname{tg}^2 x\,dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = \operatorname{tg} x - x + C.$$

15. $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)}$

Řešení: Pomocí lineární substituce $y = 2x + \frac{\pi}{4}$ dostaneme

$$\int \frac{1}{\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}\,dx \stackrel{C}{=} -\frac{1}{2}\operatorname{cotg}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

16. $f(x) = \left(\dfrac{1-x}{x}\right)^2$

Řešení: Sledujte výpočet.

$$\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx = \int \left(\frac{1}{x} - 1\right)^2 dx = \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + 1\right)dx = -\frac{1}{x} - 2\ln|x| + x + C.$$

17. $f(x) = \left(\dfrac{a}{x} + \dfrac{a^2}{x^2} + \dfrac{a^3}{x^3}\right)$, $a \in \mathbb{R}$

Řešení: Sledujte výpočet

$$\int \left(\frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2} + \frac{a^3}{x^3}\right)dx = a\ln|x| - \frac{a^2}{x} - \frac{a^3}{2x^2} + C.$$

18. $f(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}$

Řešení: Sledujte výpočet

$$\int \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx = \int \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x^{3/2}}\,dx = \int \left(1-\frac{1}{x^2}\right)x^{3/4}\,dx = \int \left(x^{3/4} - x^{-2+3/4}\right)dx =$$

$$= \int \left(x^{3/4} - x^{-5/4}\right)dx = \frac{x^{7/4}}{7/4} - \frac{x^{-1/4}}{-1/4} = \frac{4}{7}x^{7/4} + 4x^{-1/4} + C.$$

19. $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}$

Řešení: Sledujte výpočet

$$\int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\,dx = \int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)dx = \arcsin x + \mathrm{l}$$

20. $f(x) = (2^x + 3^x)^2$

Řešení: Sledujte výpočet

$$\int (2^x+3^x)^2\ dx = \int (4^x + 2\cdot 6^x + 9^x)\ dx = \frac{4^x}{\ln 4} + \frac{2\cdot 6^x}{\ln 6} + \frac{9^x}{\ln 9} + C.$$

21. $f(x) = \sqrt[3]{1-3x}$

Řešení: Je

$$\int \sqrt[3]{y}\,dy = \frac{y^{4/3}}{4/3} + C.$$

Podle příkladu (**??**) o lineární substituci je

$$\int \sqrt[3]{1-3x}\,dx = -\frac{1}{3}\frac{(1-3x)^{4/3}}{4/3} + C = -\frac{1}{4}\sqrt[3]{(1-3x)^4} + C.$$

22. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2-3x^2}}$

Řešení: Analogicky jako v předchozím příkladu

$$\int \frac{1}{\sqrt{2-3x^2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{\frac{3}{2}}x)^2}} \stackrel{C}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\arcsin\sqrt{\frac{3}{2}}x = \sqrt{\frac{1}{3}}\arcsin\sqrt{\frac{3}{2}}x$$