# 5. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

## Teorie

**Věta 1** (Poloměr konvergence)**.** Nechť $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ je mocninná řada. Pak existuje právě jeden nezáporný prvek $R \in \mathbb{R}^*$ takový, že

- pro každé $x \in \mathbb{R}$, $|x - x_0| < R$, uvedená řada konverguje absolutně,
- pro každé $x \in \mathbb{R}$, $|x - x_0| > R$, uvedená řada diverguje.

Prvek $R$ splňuje

$$R = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}},$$

kde výrazem $1/0$ zde rozumíme $+\infty$ a výrazem $1/\infty$ zde rozumíme 0.

**Poznámka 2.** Mějme mocninnou řadu $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$. Jestliže existuje limita

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|,$$

potom je rovna poloměru konvergence $R$ této mocninné řady.

**Věta 3** (Operace s mocninnými řadami)**.** Nechť $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ a $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n$ mají kladné poloměry konvergence $R_1$ a $R_2$. Pak

(a) $f(x) + g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)(x - x_0)^n$, $|x - x_0| < \min\{R_1, R_2\}$,

(b) $f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{i=0}^{n} a_{n-i}b_i)(x - x_0)^n$, $|x - x_0| < \min\{R_1, R_2\}$.

## Příklady

Určete poloměr konvergence $R$ následujících mocninných řad a také konvergenci na hranici.

1. $$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n^2} \cdot x^n,$$

   kde $(0 < \alpha < 1)$

   **Řešení:** Podle Cauchy-Hadamardova vztahu

   $$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\alpha^{n^2}|} = \limsup_{n\to\infty} \alpha^n = 0,$$

   a tedy $R = +\infty$.

2. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^p},$$

   kde $p \in \mathbb{R}$.

   **Řešení:** Pro každé $p \in \mathbb{R}$ platí

   $$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{n^p}}{\frac{1}{(n+1)^p}} \right| = 1,$$

   tudíž poloměr konvergence je vždy 1.

   Chování na hranici:

   Pokud $p > 1$, pak řada konverguje absolutně na hranici.

   Pokud $1 \geq p > 0$, potom řada
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p},$$

   konverguje neabsolutně dle Leibnize. Řada

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p},$$

   diverguje.

   Pro $p > 0$ řada na hranici diverguje.

3.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a^{n^2}} \cdot x^n,$$

kde $(a > 1)$

**Řešení:**

Platí

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n!}{a^{n^2}}}{\frac{(n+1)!}{a^{(n+1)^2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{(n+1)^2-n^2}}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{2n+1}}{n+1} = +\infty.$$

4.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n}(x+1)^n$$

**Řešení:**

Platí

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|3^n + (-2)^n|}{n}} = \limsup_{n\to\infty} 3 \cdot \frac{\sqrt[n]{|1 + (-2/3)^n|}}{\sqrt[n]{n}} = 3 \cdot \frac{1}{1} = 3.$$

tudíž poloměr konvergence je $\frac{1}{3}$.

Chování na hranici: Je třeba vyšetřit konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

V prvním případě máme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^n}{n},$$

což porovnáme s řadou $b_n = 1/n$, což diverguje.

V druhém případě získáme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} + \frac{2^n}{n3^n}.$$

První část konverguje z Leibnize, druhá z d'Alamberta, tedy konverguje. Absolutní konvergenci již vyloučil první případ.

5.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^{n^2}$$

**Řešení:**

Jedná se o mocninnou řadu, jejíž koeficienty jsou povětšinou nulové, s výjimkou koeficientů u $x^{n^2}$. Uvědomte si nyní, že koeficient $\frac{1}{2^n}$ je koeficient nikoliv u $n$-tého, ale $n^2$-tého členu této řady! Abychom mohli použít vztahy pro výpočet poloměru konvergence, potřebujeme najít vztah pro $n$-tý koeficient $a_n$!

Jestliže ale platí

$$a_{n^2} = \frac{1}{2^n} \qquad \text{a koeficienty jsou jinde nulové,}$$

potom

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2^{\sqrt{n}}} \qquad \text{pokud } n = k^2 \text{ pro nějaké } k \text{ přirozené} \\ a_n &= 0 \qquad \text{jinak} \end{aligned}$$

Podle Cauchy-Hadamardova vztahu spočteme

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2^{\sqrt{n}}}\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} 2^{-\sqrt{n}\cdot\frac{1}{n}} = 2^0 = 1.$$

Na hranici řada zjevně konverguje absolutně.

6.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} x^n$$

**Řešení:** Platí

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}}{\frac{(2n+2)!!}{(2n+3)!!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{2n+2} = 1.$$

Pro konvergneci na hranici využijeme odhadů dokazatelných indukcí

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} > \frac{1}{2n+1}, \qquad \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{1}{\sqrt{2n+2}}.$$

Z prvního odhadu je zřejmé, že pro $x = 1$ řada diverguje srovnáním s řadou $\sum \frac{1}{2n+1}$. Z druhého odhadu vyplývá, že pro $x = -1$ řada konverguje neabsolutně podle Leibnize. (nutno dokázat monotonii posloupnosti $\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$).

7.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[3+(-1)^n]^n}{n} x^n$$

**Řešení:** Platí

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{[3+(-1)^n]^n}{n}} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{[3+(-1)^n]^n} = \limsup_{n\to\infty} [3+(-1)^n] = 4.$$

Tudíž $R = \frac{1}{4}$.

Konvergence na hranici: Vyšetřujeme řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[3+(-1)^n]^n}{n} \frac{1}{4^n}$$

a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[3+(-1)^n]^n}{n} \frac{(-1)^n}{4^n}$$

Podíváme-li se pouze na sudé členy, dostaneme řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{2n}}{2n} \frac{1}{4^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n},$$

která diverguje.

Pro liché členy dostaneme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{2n+1} \frac{1}{4^{2n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \frac{1}{2^{2n+1}},$$

a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{2n+1} \frac{(-1)^n}{4^{2n+1}},$$

které konvergují absolutně.

Sečtením „liché“ a „sudé části“ řady dospíváme k závěru, že pro $\alpha = 0$ řada na hranici diverguje.

8.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^n + b^n},$$

kde $a > 0$, $b > 0$.

**Řešení:**

Podle Cauchy-Hadamardova vztahu platí

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a^n + b^n}} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\max(a,b)} \sqrt[n]{\frac{\max(a^n, b^n)}{a^n + b^n}} = \frac{1}{\max(a,b)},$$

a tudíž

$$R = \max(a,b).$$

Na hranici řada diverguje, neboť nesplňuje nutnou podmínku konvergence:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\max(a,b)^n}{a^n + b^n} \to 1 \neq 0.$$

9.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$$

**Řešení:**

Je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n!)^2}{(2n!)}}{\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = 4.$$

Tudíž poloměr konvergence je 4.

Na hranici tedy vyšetřujeme řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} 4^n$$

a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} (-1)^n 4^n.$$

Pro $x = -4$ máme:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n!)^2 x^n 4^n}{(2n)!}$$

použijeme Leibnize a zjišťujeme, zda

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2 4^n}{(2n)!}$$

jde k 0. Porovnáme $a_n$ a $a_{n+1}$:

$$\frac{a_n}{a_n + 1} = \frac{n!n!4^n(2n+2)!}{(2n)!(n+1)!(n+1)!4 \cdot 4^n} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2} = \frac{4n+2}{4n+4} < 1$$

Tedy posloupnost $a_n$ je rostoucí, první člen je roven 1, tedy zjevně nejde k 0, tedy řada diverguje v bodě -4. Tedy v bodě 4 také.

Závěr: řada konverguje na $(-4, 4)$.

10.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\cdot x^n$$

**Řešení:** Podle Cauchy-Hadamardova vztahu

$$\frac{1}{R}=\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\right|}=\limsup_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e,$$

a tedy $R=\frac{1}{e}$.

Na hranici tedy vyšetřujeme řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{e^n}$$

a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{e^n}(-1)^n.$$

Platí ale

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{e^n}=\frac{1}{\sqrt{e}},$$

tudíž řada diverguje, protože nesplňuje nutnou podmínku konvergence $a_n\to 0$. Limitu lze spočítat například takto pomocí Taylorova rozvoje (s využitím spojitosti exponenciální funkce):

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}\frac{1}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\exp\left[x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-x\right]=\exp\left[\lim_{x\to\infty}x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-x\right]=$$

$$=\exp\left[\lim_{x\to\infty}x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o(x^{-2})\right)-x\right]=\exp\left[\lim_{x\to\infty}-\frac{1}{2}+o(1)\right]=e^{-1/2+0}=e^{-1/2}.$$

Závěr: řada konverguje na $(-1/e,1/e)$.

11.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{a^{\sqrt{n}}},$$

kde $a>0$.

**Řešení:**

Podle Cauchy-Hadamardova vztahu platí

$$\frac{1}{R}=\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{a^{\sqrt{n}}}}=\limsup_{n\to\infty}a^{-\sqrt{n}\cdot 1/n}=a^0=1.$$

Tedy
$$R = 1.$$
Pokud $a > 1$, potom řada na hranici konverguje absolutně, což ze srovnání
$$\frac{\frac{1}{a^{\sqrt{n}}}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{a^{\sqrt{n}}} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$
(Limitu lze spočíst například použitím Heineho věty a dvojnásobným aplikováním l'Hopitalova pravidla.)

Pokud $0 < a \leq 1$, potom řada na hranici diverguje, neboť nesplňuje nutnou podmínku konvergence, $a_n \not\to 0$.

12.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2} \right) \cdot x^n,$$
kde $a > 0$, $b > 0$.

**Řešení:** Máme
$$a_n = \frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2}$$
Vyšetříme dva případy, nejprve $a \geq b$, pak
$$a = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a^n}{n}} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2}} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a^n}{n} + \frac{a^n}{n^2}} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2a^n}{n}} \overset{VOAL}{=} a$$
$$\rho = \frac{1}{a}$$
analogicky pro $a < b$:
$$b = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{b^n}{n^2}} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2}} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{b^n}{n} + \frac{b^n}{n^2}} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2b^n}{n}} \overset{VOAL}{=} b$$
$$\rho = \frac{1}{b}$$
Tedy $\rho = \min\{\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\}$.

Krajní body vyšetříme pro oba případy zvlášť. Řadu rozvíjíme v 0, tedy krajní body jsou $\rho = \min\{\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\}$a $-\rho = -\min\{\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\}$.

Nechť $a \geq b$. Pak nás zajímá řada:
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2} \right) \frac{1}{a^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{n} + \frac{b^n}{a^n n^2} \right) \geq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Použijeme porovnání řad (vše je tu kladné!) a zjistíme, že řada diverguje, jelikož je to kladné, tak i v absolutní hodnotě. Druhý krajní bod:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2} \right) \frac{(-1)^n}{a^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^n b^n}{a^n n^2} \right)$$

Toto můžeme roztrhnout na 2 konvergentní řady, první konverguje z Leibnize, druhá taktéž. Tedy řada v krajním bodě $-1/a$ konverguje, ale nikoli absolutně.

Nechť $a < b$. Pak nás zajímá řada:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2} \right) \frac{1}{b^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{a^n}{b^n n} + \frac{1}{n^2} \right)$$

Toto opět roztrhneme na 2 řady, první konverguje z d'Alembertova kritéria, o druhé to víme. Tedy roztržení bylo korektní (roztrhli jsme na 2 konvergentní řady), řada konverguje. Dosadíme-li následně jako krajní bod $-1/b$, můžeme rozvnou říci, že řada konverguje absolutně.

Tím jsme hotovi, jen je třeba dát pozor na případ $a = b$.