3. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Příklady

1.
$$\lim_{x\to+\infty} x^{3/2}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right)$$

Řešení: Protože na rozvíjení v nekonečnu nemáme vztahy, provedeme substituci $y=\frac{1}{x}$ a dostaneme

$$\lim_{x\to+\infty} x^{3/2}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right) = \lim_{y\to0+} y^{-3/2}\left(\sqrt{\frac{1}{y}+1}+\sqrt{\frac{1}{y}-1}-2\sqrt{\frac{1}{y}}\right) =$$
$$= \lim_{y\to0+} y^{-2}\left(\sqrt{1+y}+\sqrt{1-y}-2\right) =$$

a nyní rozvineme obě odmocniny do druhého řádu

$$= \lim_{y\to0+} y^{-2}\left((1+\frac{1}{2}y+\frac{\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2})}{2!}y^2+o(y^2))+(1-\frac{1}{2}y+\frac{\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2})}{2!}y^2+o(y^2))-2\right) =$$
$$= \lim_{y\to0+}\left(-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}+o(1)\right) = -\frac{1}{2}+0=-\frac{1}{4}.$$

2.
$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5}$$

Řešení:

Provedeme substituci $y=\frac{1}{x}$.

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5} = \lim_{x\to+\infty} x\sqrt[6]{1+\frac{1}{x}}-x\sqrt[6]{1-\frac{1}{x}} = \lim_{y\to0+}\frac{\sqrt[6]{1+y}-\sqrt[6]{1-y}}{y} =$$

a nyní rozvineme odmocniny v čitateli, stačí do prvního řádu

$$= \lim_{y\to0+}\frac{(1+\frac{1}{6}y+o(y)-(1-\frac{1}{6}y+o(y))}{y} = \frac{1}{3}+\lim_{y\to0+}\frac{o(y)}{y} = \frac{1}{3}+0=\frac{1}{3}.$$

3.
$$\lim_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{1/x}-\sqrt{x^6+1}\right]$$

Řešení: Provedeme substituci $y=\frac{1}{x}$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{1/x}-\sqrt{x^6+1}\right] = \lim_{y\to0+}\frac{\left[\left(1-y+\frac{1}{2}y^2\right)e^{y}-\sqrt{1+y^6}\right]}{y^3} =$$

a nyní rozvineme exponencielu a odmocninu v čitateli do třetího řádu

$$= \lim_{y\to 0+} \frac{\left(1-y+\frac{1}{2}y^2\right)\left(1+y+\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{6}+o(y^3)\right)-1+o(y^6)}{y^3} =$$

$$= \lim_{y\to 0+} \frac{(1-y+\frac{1}{2}y^2)+(y-y^2+\frac{1}{2}y^3)+\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{2}+\frac{y^3}{6}+o(y^3)-1}{y^3} =$$

$$= \lim_{y\to 0+} \frac{\frac{y^3}{6}+o(y^3)}{y^3} = \frac{1}{6} + \lim_{y\to 0+} \frac{o(y^3)}{y^3} = \frac{1}{6}.$$

4.

$$\lim_{x\to +\infty} \left[x - x^2 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$$

Řešení: Provedeme substituci $y = \frac{1}{x}$.

$$\lim_{x\to +\infty} \left[x - x^2 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right] = \lim_{y\to 0+} \left[\frac{1}{y} - \frac{1}{y^2} \ln(1+y)\right] =$$

a nyní rozvineme logaritmus do druhého řádu

$$= \lim_{y\to 0+} \left[\frac{1}{y} - \frac{1}{y^2}\left(y - \frac{y^2}{2} + o(y^2)\right)\right] =$$

$$= \lim_{y\to 0+} \left[\frac{1}{y} - \frac{1}{y} + \frac{1}{2} + o(1)\right] = \frac{1}{2}.$$

5.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\mathrm{tg}\ x} - \sqrt{1+\sin x}}{x^3}$$

Řešení:

Protože jmenovatel je třetího řádu, budeme hledat rozvoj čitatele do třetího řádu. Je

$$\mathrm{tg}\ x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

odkud vyplývá

$$\sqrt{1+\mathrm{tg}\ x} = 1 + \frac{1}{2}\mathrm{tg}\ x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}\mathrm{tg}^2 x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!}\mathrm{tg}^3 x + o(x^3) =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$$

Na druhou stranu

$$\sqrt{1+\sin x} = 1 + \frac{1}{2}\sin x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}\sin^2 x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!}\sin^3 x + o(x^3) =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$$

odkud vyplývá, že

$$\sqrt{1+\operatorname{tg} x} - \sqrt{1+\sin x} = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{12}\right)x^3 + o(x^3) = \frac{1}{4}x^3 + o(x^3),$$

a tedy

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x} - \sqrt{1+\sin x}}{x^3} = \frac{1}{4}.$$

6.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(xe^x) - \cos(xe^{-x})}{x^3}$$

Řešení: Zřejmě stačí rozvést čitatel do třetího řádu.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(xe^x) - \cos(xe^{-x})}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{1}{2}x^2e^{2x} - (1 - \frac{1}{2}x^2e^{-2x}) + o(x^3)}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{e^{-2x} - e^{2x}}{2x} + \frac{o(x^3)}{x^3}\right) = -2 + 0 = -2.$$

7.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2+5x^4} - e^{x^2-3x^4}}{(\cos x - 1)(\cosh x - 1)}$$

Řešení:

Protože platí

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cosh x - 1}{x^2} = \frac{1}{2},$$

pak, existuje-li limita napravo, platí

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2+5x^4} - e^{x^2-3x^4}}{(\cos x - 1)(\cosh x - 1)} = \lim_{x\to 0} -4\frac{e^{x^2+5x^4} - e^{x^2-3x^4}}{x^4} =$$

stačí tedy rozvést čitatel do čtvrtého stupně. Tak dostaneme

$$= \lim_{x\to 0} -4\frac{(1 + x^2 + 5x^4 + \frac{x^4}{2}) - (1 + x^2 - 3x^4 + \frac{x^4}{2}) + o(x^4)}{x^4} = \lim_{x\to 0} -4\frac{8x^4 + o(x^4)}{x^4} = -32.$$

8.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh(\operatorname{tg} x) - x}{x^3}$$

Řešení:

Čitatel musíme rozvést do třetího řádu. Platí, že

$$\sinh\,(\text{tg }x) = \frac{e^{\text{tg }x} - e^{-\text{tg }x}}{2}$$

$$= \frac{1 + \text{tg }x + \frac{\text{tg }^2x}{2} + \frac{\text{tg }^3x}{6} + o(x^3) - (1 - \text{tg }x + \frac{\text{tg }^2x}{2} - \frac{\text{tg }^3x}{6} + o(x^3))}{2} =$$

$$= \text{tg }x + \frac{\text{tg }^3x}{6} + o(x^3)$$

dostáváme tak

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh\,(\text{tg }x) - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\text{tg }x + \frac{\text{tg }^3x}{6} - x + o(x^3)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\text{tg }x - x}{x^3} + \lim_{x\to 0} \frac{1}{6}\frac{\text{tg }^3x}{x^3} + \lim_{x\to 0} \frac{o(x^3)}{x^3} =$$

A dále platí, že

$$\text{tg }x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - x^3/3! + o(x^4)}{1 - x^2/2 + o(x^3)} =$$

$$= (x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{x^2}{2} + o(x^3))^k =$$

$$= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{2} + o(x^3) = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

a proto dostaneme, že

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\text{tg }x - x}{x^3} + \lim_{x\to 0} \frac{1}{6}\frac{\text{tg }^3x}{x^3} + \lim_{x\to 0} \frac{o(x^3)}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}{x^3} + \lim_{x\to 0} \frac{1}{6}\frac{\text{tg }^3x}{x^3} + \lim_{x\to 0} \frac{o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + 0 = \frac{1}{2}.$$

9. Najděte $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - (a + b\cos x)\sin x}{x^4} = 0.$

Řešení:

Platí

$$x - a\sin x - b\sin x\cos x = x - a\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) - \frac{b}{2}\left(2x - \frac{(2x)^3}{6} + o(x^4)\right) =$$

$$= x - ax + \frac{ax^3}{6} - bx + \frac{4bx^3}{6} + o(x^4).$$

Aby limita byla nulová, musí být pro každé x z nějakého okolí nuly (a tedy všude)

$$x - ax - bx = 0 \implies 1 - a - b = 0$$

$$\frac{ax^3}{6} + \frac{4bx^3}{6} = 0 \implies a + 4b = 0$$

Odtud máme $a = -4b$ a $1 + 4b - b = 0$, tedy $b = -\frac{1}{3}$ a $a = \frac{4}{3}$.

10.
$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^x-1}{x^n}$$

Řešení: Je $(1+x)^x = e^{x\ln(1+x)}$ a rozvoj je

$$e^{x\ln(1+x)} = e^{x(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2))} = e^{x^2-x^3/2+o(x^3)} = 1+x^2-\frac{x^3}{2}+o(x^3) = 1+x^2+o(x^2),$$

tudíž
$$(1+x)^x-1 = e^{x\ln(1+x)}-1 = x^2+o(x^2),$$
hledané n je rovno dvěma a platí

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^x-1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2+o(x^2)}{x^2} = 1.$$

11.
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln^2(1+\sin x)-\ln^2(1+\arcsin\, x)}{x^n}$$
(Najděte takové $n\in\mathbb{N}$, aby limita byla konečná a různá od nuly.)

Řešení: Porovnáme rozvoje funkcí $\sin x$ a $\arcsin\, x$ a zjistíme první člen, kde se liší. Ten bude určující.

$$\sin x = x-\frac{x^3}{6}+o(x^3), \qquad \arcsin\, x = x+\frac{x^3}{6}+o(x^3).$$
Odtud vidíme, že pravděpodobně budeme muset rozvíjet do třetího řádu. Je

$$\ln(1+y) = y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}+o(y^3),$$

a proto

$$\ln(1+x\pm\frac{x^3}{6}+o(x^3)) = \left(x\pm\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)-\frac{1}{2}\left(x\pm\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^2+\frac{1}{3}\left(x\pm\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^3+o(x^3) =$$

$$= x-\frac{1}{2}x^2\pm\frac{x^3}{6}+\frac{1}{3}x^3+o(x^3),$$
z čehož vyplývá, že

$$\ln^2(1+x\pm\frac{x^3}{6}+o(x^3)) = x^2-x^3+\frac{1}{4}x^4\pm\frac{x^4}{3}+o(x^4).$$
Není třeba pokračovat do vyšších mocnin, hledali jsme první člen, kde se rozvoje budou lišit. Odtud vyplývá

$$\ln^2(1+\sin x)-\ln^2(1+\arcsin\, x) = \ln^2(1+x-\frac{x^3}{6}+o(x^3))-\ln^2(1+x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)) =$$

$$= \left(x^2 - x^3 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right) - \left(x^2 - x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right) = -\frac{2}{3}x^4 + o(x^4).$$

Odtud vyplývá, že hledané $n = 4$ a platí

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln^2(1+\sin x) - \ln^2(1+\arcsin x)}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{2}{3}x^4 + o(x^4)}{x^4} = -\frac{2}{3}.$$