2. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Věta 1 (Vlastnosti o)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}^*$.

(a) Jestliže $f_1(x) = o(g(x)),\ x \to a,$ a $f_2(x) = o(g(x)),\ x \to a$, pak

$$(f_1 + f_2)(x) = o(g(x)),\ x \to a.$$

(b) Jestliže $f_1(x) = o(g_1(x)),\ x \to a,$ a $f_2(x) = o(g_2(x)),\ x \to a$, pak

$$(f_1 \cdot f_2)(x) = o((g_1 \cdot g_2)(x)),\ x \to a.$$

(c) Jestliže $f(x) = o(g_1(x)),\ x \to a,$ a $\lim_{x\to a} \frac{g_1(x)}{g_2(x)} \in \mathbb{R}$, pak

$$f(x) = o(g_2(x)),\ x \to a.$$

Poznámka 2. 1. Výraz $R_n^{f,a}(x) := f(x) - T_n^{f,a}(x)$ nazýváme *zbytkem po Taylorově polynomu řádu n.*

2. Peanova věta tedy říká, že $f(x) - T_n^{f,a}(x) = o((x-a)^n)$, $x \to a$.

Příklady

Pomocí Taylorova rozvoje určete následující limity.

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2}$, $a > 0$
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$
5. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - \operatorname{cotg} x\right)$
6. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin x) - x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}$
7. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$
8. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2+x} - \sin x + 3\cos x - 4}{\arctan^3 x}$
9. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \sin x - 1}{x^2}$
10. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(e^{x^2} - 1)(\sin x - x)^2}{(\cos x - 1)^2 \sin^4 x}$
11. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2(\sin x - \operatorname{tg} x) + x^3}{(\exp x - 1)(\exp(-x^2) - 1)^2}$
12. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2\arcsin x - \operatorname{tg} x - x}{2\sin x - \arctan x - x}$
13. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^3}$