1. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Definice 1. Nechť f, g jsou reálné funkce a $a \in \mathbb{R}^*$. Řekneme, že funkce f *je v bodě* a *malé o od* g (značíme $f(x) = o(g(x))$, $x \to a$), pokud $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Speciálně, zápis
$$f(x) = o(x^n)$$
značí, pokud $f \neq 0$ na nějakém prstencovém okolí nuly, že
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n} = 0.$$

Definice 2. Nechť f je funkce, $a \in \mathbb{R}$ a existuje $f^{(n)}(a) \in \mathbb{R}$. Pak polynom
$$T_n^{f,a}(x) := f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n, \quad x \in \mathbb{R},$$
nazveme *Taylorovým polynomem řádu n funkce f v bodě a.*

Definice 3. Nechť f je reálná funkce, $a \in \mathbb{R}$ a f má konečné derivace všech řádů v bodě a. Pak
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n$$
nazýváme *Taylorovou řadou se středem v bodě a.* (Připomeňme, že ve výše uvedeném vzorci uvažujeme $0! = 1$ a $0^0 = 1$.)

Věta (Lokální Taylorova): *Jestliže reálná funkce f je definována na nějakém okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}$ a navíc*
(i) má na tomto okolí derivace do řádu $n-1$ včetně v každém bodě
(ii) a v bodě x_0 má také derivaci n-tého řádu, potom
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k + o((x-x_0)^n),$$
kde koeficienty a_k jsou určeny jednoznačně a platí
$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \qquad k = 0, 1, \ldots, n.$$
Speciálně, pokud $x_0 = 0$, pak
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n).$$

Pomocí Taylorovy věty lze odvodit, že platí (jde o rozvoje v nule)

1. $e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$
2. $\sin x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n})$
3. $\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$
4. $(1+x)^m = \sum_{k=0}^{n} \binom{m}{k} x^k + o(x^n)$
5. $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + o(x^n)$
6. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
7. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n})$
8. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
9. $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$
10. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$

Příklady

1. Rozviňte funkci $f(x) = -2x^2 - 6x + 2$ v bodě $a = 4$.

   Řešení: Začneme derivovat:

   $$f'(x) = -4x - 6$$
   $$f'(4) = -22$$
   $$f''(x) = -4$$
   $$f''(4) = -4$$

   Všechny další derivace už jsou rovny 0, čímž jsme získali odpověď na otázku, jak bude dlouhý rozvoj. Dosadíme:

   $$T_2^{f,4} = -54 - 22(x-4) - 4(x-4)^2 = -2x^2 - 6x + 2$$

   Vyšel nám původní polynom.

2. Odvoďte rozvoje pro následující funkce v nule do n-tého řádu.

   (a) e^x

   Řešení: Použijeme vyjádření koeficientů v lokální Taylorově větě. K tomu stačí spočítat n-tou derivaci dané funkce a dělit $n!$.

   Použijeme vyjádření koeficientů v lokální Taylorově větě. K tomu stačí spočítat n-tou derivaci dané funkce a dělit $n!$.

(b) $\sin x$

Řešení: Použijeme vyjádření koeficientů v lokální Taylorově větě. K tomu stačí spočítat n-tou derivaci dané funkce a dělit $n!$.

(c) $\cos x$

Řešení: Platí, že

$$(\cos x)^{(4n+1)} = -\sin x, \quad (\cos x)^{(4n+2)} = -\cos x,$$
$$(\cos x)^{(4n+3)} = \sin x, \quad (\cos x)^{(4n)} = \cos x, \qquad n \in \mathbb{N}$$

a tedy

$$(\cos x)^{(4n+1)}(0) = 0, \quad (\cos x)^{(4n+2)} = -1, \quad (\cos x)^{(4n+3)}(0) = 0,$$
$$(\cos x)^{(4n)} = 1, \qquad n \in \mathbb{N}$$

všechny liché derivace jsou tedy nulové a sudé lze vyjádřit jedním vztahem

$$(\cos x)^{(2n)}(0) = (-1)^n, \qquad n \in \mathbb{N}$$

(d) $\ln(1+x)$ **Řešení:** Platí, že

$$[\ln(1+x)]' = \frac{1}{1+x}, \qquad [\ln(1+x)]'' = -\frac{1}{(1+x)^2},$$
$$[\ln(1+x)]''' = \frac{1\cdot 2}{(1+x)^3}, \qquad [\ln(1+x)]'''' = -\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(1+x)^4}$$

odkud lze vyvodit, že

$$[\ln(1+x)]^{(n)} = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}.$$

V nule dostaneme

$$[\ln(1+x)]^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!$$

3. Najděte Taylorův rozvoj v nule funkce

$$f(x) = e^{2x-x^2}$$

do pátého řádu.

Řešení: Podle vztahu pro rozvoj exponenciální funkce dostaneme

$$e^{2x-x^2} = 1 + (2x-x^2) + \frac{(2x-x^2)^2}{2!} + \frac{(2x-x^2)^3}{3!} + \frac{(2x-x^2)^4}{4!} + \frac{(2x-x^2)^5}{5!} =$$
$$= 1+(2x-x^2)+\frac{1}{2}(4x^2-4x^3+x^4)+\frac{1}{6}(8x^3-12x^4+6x^5+o(x^5))+\frac{1}{24}(16x^4-32x^5+o(x^5))$$
$$+\frac{1}{120}(32x^5+o(x^5)) =$$
$$= 1 + 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{6}x^4 - \frac{1}{15}x^5 + o(x^5)$$

4. Najděte Taylorův rozvoj v nule funkce

$$f(x) = \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$$

do čtvrtého řádu. Určete $f^{(4)}(0)$.

Řešení: Na nějakém okolí nuly, kde $|x - x^2| < 1$, platí rovnost

$$\begin{aligned}
&\frac{1+x+x^2}{1-(x-x^2)} \\
&= (1+x+x^2) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (x-x^2)^k = \\
(1+x+x^2) + (1+x+x^2)(x-x^2) + (1+x+x^2)(x-x^2)^2& \\
+(1+x+x^2)(x-x^2)^3 + (1+x+x^2)(x-x^2)^4 + o(x^4) =& \\
= (1+x+x^2) + (x+x^2+x^3-x^2-x^3-x^4)& \\
+(x^2+x^3+x^4-2x^3-2x^4+x^4+o(x^4)) + (x^3+x^4-3x^4+o(x^4))& \\
+(x^4+o(x^4)) + o(x^4) =& \\
= 1+2x+2x^2-2x^4+o(x^4)&
\end{aligned}$$

Z jednoznačnosti rozvoje pak vyplývá, že $f^{(4)}(0)/4! = -2$, a tedy $f^{(4)}(0) = -48$.

5. Najděte Taylorův rozvoj v nule funkce

$$f(x) = \ln(\cos x)$$

do šestého řádu.

Řešení:

Je

$$f(x) = \ln(\cos x) = \ln(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6)) =$$

Označme $V(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6)$

$$= V(x) - \frac{V(x)^2}{2} + \frac{V(x)^3}{3} + o(x^6) =$$

$$= \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6)\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4} - 2\frac{x^2}{2}\frac{x^4}{24} + o(x^6)\right) + \frac{1}{3}\left(-\frac{x^6}{8} + o(x^6)\right) =$$

$$= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} + o(x^6)$$

6. Najděte Taylorův rozvoj v nule funkce

$$f(x) = \sin(\sin x)$$

do třetího řádu.

Řešení: Je

$$f(x) = \sin(\sin x) = \sin(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)) =$$

Označme $V(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

$$= V(x) - \frac{V(x)^3}{6} + o(x^3) =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3 + o(x^3) =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - \frac{1}{6}\left(x^3 + o(x^3)\right) + o(x^3) =$$

$$= x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

7. Najděte Taylorův rozvoj v nule funkce

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$$

do čtvrtého řádu.

Řešení:

Na vhodném okolí nuly je

$$\frac{x}{e^x - 1} = \frac{x}{x + x^2/2! + x^3/3! + x^4/4! + x^5/5! + o(x^6)} =$$

$$\frac{1}{1 + x/2! + x^2/3! + x^3/4! + x^4/5! + o(x^5)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \left(\frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^5)\right)^k =$$

Označme $V(x) = \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^5)$

$$= 1 - V(x) + V(x)^2 - V(x)^3 + V(x)^4 - V(x)^5 + o(x^5).$$

Rozveďme jednotlivé mocniny $V(x)$ do pátého řádu.

$$V(x) = \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^5)$$

$$V(x)^2 = \frac{x^2}{2!} + 2\frac{x^3}{2!3!} + \frac{x^4}{3!3!} + 2\frac{x^4}{2!4!} + 2\frac{x^5}{2!5!} + 2\frac{x^5}{3!4!} + o(x^5)$$
$$V(x)^3 = \frac{x^3}{2!2!2!} + 3\frac{x^4}{2!2!3!} + 3\frac{x^5}{2!2!4!} + 3\frac{x^5}{2!3!3!} + o(x^5)$$
$$V(x)^4 = \frac{x^4}{2!2!2!2!} + 4\frac{x^5}{2!2!2!3!} + o(x^5)$$
$$V(x)^5 = \frac{x^5}{2!2!2!2!2!} + o(x^5)$$

Když všechny příspěvky sečteme, resp. odečteme, dostaneme

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{720}x^4 + o(x^5)$$

8. Najděte Taylorův rozvoj v nule funkce

$$f(x) = \mathrm{tg}\ x$$

do pátého řádu.

Řešení: Je

$$f(x) = \mathrm{tg}\ x = \frac{\sin x}{\cos x} = (x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)) \cdot \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)} =$$

na vhodném okolí nuly

$$= (x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + o(x^5) \right)^k =$$

$$= (x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)) + (x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)) \cdot \left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + o(x^5) \right) +$$
$$(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)) \cdot \left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + o(x^5) \right)^2 + o(x^5) =$$
$$= (x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)) + \frac{x^3}{2!} - \frac{x^5}{4!} - \frac{x^5}{3!2!} + o(x^5) + \frac{x^5}{2!2!} + o(x^5) + o(x^5) =$$
$$= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$$