1. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Definice 1. Nechť f, g jsou reálné funkce a $a \in \mathbb{R}^*$. Řekneme, že funkce f *je v bodě* a *malé o od* g (značíme $f(x) = o(g(x))$, $x \to a$), pokud $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Speciálně, zápis
$$f(x) = o(x^n)$$
značí, pokud $f \neq 0$ na nějakém prstencovém okolí nuly, že
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n} = 0.$$

Definice 2. Nechť f je funkce, $a \in \mathbb{R}$ a existuje $f^{(n)}(a) \in \mathbb{R}$. Pak polynom
$$T_n^{f,a}(x) := f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n, \quad x \in \mathbb{R},$$
nazveme *Taylorovým polynomem řádu n funkce f v bodě a.*

Definice 3. Nechť f je reálná funkce, $a \in \mathbb{R}$ a f má konečné derivace všech řádů v bodě a. Pak
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n$$
nazýváme *Taylorovou řadou se středem v bodě a.* (Připomeňme, že ve výše uvedeném vzorci uvažujeme $0! = 1$ a $0^0 = 1$.)

Věta (Lokální Taylorova): *Jestliže reálná funkce f je definována na nějakém okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}$ a navíc*
(i) má na tomto okolí derivace do řádu $n-1$ včetně v každém bodě
(ii) a v bodě x_0 má také derivaci n-tého řádu, potom
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k + o((x-x_0)^n),$$
kde koeficienty a_k jsou určeny jednoznačně a platí
$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \qquad k = 0, 1, \ldots, n.$$
Speciálně, pokud $x_0 = 0$, pak
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n).$$

Pomocí Taylorovy věty lze odvodit, že platí (jde o rozvoje v nule)

1. $e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$
2. $\sin x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n})$
3. $\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$
4. $(1+x)^m = \sum_{k=0}^{n} \binom{m}{k} x^k + o(x^n)$
5. $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + o(x^n)$
6. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
7. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n})$
8. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
9. $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$
10. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$

Příklady

1. Rozviňte funkci $f(x) = -2x^2 - 6x + 2$ v bodě $a = 4$.
2. Odvoďte rozvoje pro následující funkce v nule do n-tého řádu.
   (a) e^x
   (b) $\sin x$
   (c) $\cos x$
   (d) $\ln(1+x)$
3. Najděte Taylorův rozvoj v nule funkce
   $$f(x) = e^{2x - x^2}$$
   do pátého řádu.
4. Najděte Taylorův rozvoj v nule funkce
   $$f(x) = \frac{1 + x + x^2}{1 - x + x^2}$$
   do čtvrtého řádu. Určete $f^{(4)}(0)$.
5. Najděte Taylorův rozvoj v nule funkce
   $$f(x) = \ln(\cos x)$$
   do šestého řádu.
6. Najděte Taylorův rozvoj v nule funkce
   $$f(x) = \sin(\sin x)$$
   do třetího řádu.
7. Najděte Taylorův rozvoj v nule funkce
   $$f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$$
   do čtvrtého řádu.
8. Najděte Taylorův rozvoj v nule funkce
   $$f(x) = \mathrm{tg}\ x$$
   do pátého řádu.