Teorie řady

1 Řady obecně

Věta 1 (nutná podmínka konvergence řady)**.** Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Potom $\lim a_n = 0$.

Věta 2 (linearita konvergentních řad)**.** Nechť řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ mají součet.

(a) Pokud $c \in \mathbb{R}$ a výraz $c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je definován, pak má řada $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ součet a platí $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(b) Pokud je výraz $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ definován, pak má řada $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ součet a platí $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

2 Řady s nezápornými členy

Věta 3 (srovnávací kritérium)**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy a nechť existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí $a_n \leq b_n$.

(a) Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(b) Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje, diverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Věta 4 (limitní srovnávací kritérium)**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy a nechť existuje $\lim \frac{a_n}{b_n}$. Označme $K = \lim \frac{a_n}{b_n}$.

(a) Pokud $K \in (0, \infty)$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje.

(b) Pokud $K = 0$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(c) Pokud $K = \infty$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje.

Věta 5 (Cauchyovo odmocninové kritérium)**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy.

(a) Jestliže platí

$$\exists q \in (0,1)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 : \ \sqrt[n]{a_n} \leq q,$$

pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(b) Je-li $\limsup \sqrt[n]{a_n} < 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(c) Je-li $\lim \sqrt[n]{a_n} < 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(d) Je-li $\limsup \sqrt[n]{a_n} > 1$, pak posloupnost $\{a_n\}$ nekonverguje k 0, a tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

(e) Je-li $\lim \sqrt[n]{a_n} > 1$, pak posloupnost $\{a_n\}$ nekonverguje k 0, a tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Věta 6 (d'Alembertovo podílové kritérium)**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s kladnými členy.

(a) Jestliže platí

$$\exists q \in (0,1)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 :\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q,$$

pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(b) Je-li $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(c) Je-li $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(d) Je-li $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, pak $\lim a_n = \infty$, a tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Věta 7 (Raabeovo kritérium)**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy.

(a) Jestliže platí

$$\liminf n(\tfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1) > 1,$$

pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(b) Jestliže platí

$$\limsup n(\tfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1) < 1,$$

pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

3 Řady s obecnými členy

Věta 8 (Leibniz)**.** Nechť $\{a_n\}$ je monotónní posloupnost, která konverguje k 0. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ konverguje.

Věta 9 (Abelovo-Dirichletovo kritérium)**.** Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti, přičemž $\{b_n\}$ je monotónní. Nechť je navíc splněna alespoň jedna z následujících dvou podmínek:

(A) posloupnost $\{b_n\}$ je omezená a řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje,

(D) $\lim b_n = 0$ a posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je omezená.

Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje.

4 Absolutní konvergence řad

Věta 10 (vztah absolutní konvergence řady a konvergence řady)**.** Je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní, pak je i konvergentní.

Věta 11 (Cauchyovo odmocninové kritérium)**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada.

(a) Jestliže platí

$$\exists q \in (0,1)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 :\ \sqrt[n]{|a_n|} \leq q,$$

pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolutně konvergentní.

(b) Je-li $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní.

(c) Je-li $\lim \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní.

(d) Je-li $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, pak posloupnost $\{a_n\}$ nekonverguje k 0, a tedy je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní.

(e) Je-li $\lim \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, pak posloupnost $\{a_n\}$ nekonverguje k 0, a tedy je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní.

Věta 12 (d'Alembertovo podílové kritérium)**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nenulovými členy.

(a) Jestliže platí

$$\exists q \in (0,1)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 :\ \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq q,$$

pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolutně konvergentní.

(b) Je-li $\limsup \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$, pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní.

(c) Je-li $\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$, pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní.

(d) Je-li $\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$, pak $\lim |a_n| = \infty$, a tedy je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní.