Poznámky k vypracovávání příkladů

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Seznam doporučení k tématu posloupností. Ne vše je nedobytné pravidlo nebo ošklivá chyba, něco je prostě jen drobnost nebo snaha vyhnout se temným zákoutím.

1. Pečlivě se vyhýbáme částečnému limitění. To znamená, že budeme psát:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+\frac{1}{2^n}} = 1,$$

ze dvou policajtů

$$1 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+\frac{1}{2^n}} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1.$$

Ta douška o dvou policajtech je **nezbytně nutná**.

Místo nesprávného

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+\frac{1}{2^n}} \neq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+0} = 1.$$

2. Počítáme-li s **celou částí**, s výhodou užíváme faktu

$$x \geq [x] > x-1.$$

Naopak se vyvarujeme aritmetických operací. Některé věci bohužel neplatí, a to ani pro celá čísla. Tedy

$$\frac{[a]}{[b]} \neq \left[\frac{a}{b}\right],$$

např.

$$\frac{3}{4} = \frac{[3]}{[4]} \neq \left[\frac{a}{b}\right] = 0,$$

stejně tak

$$[a+b] \neq [a]+[b]$$

apod.

3. Pakliže limita posloupnosti **neexistuje**, je nutno dodržet následující postup: Nejprve najdeme vhodnou podposloupnost, typicky a_{2n} a a_{2n-1}. Pak zvlášť upočítáme jejich limity a uděláme závěr. Příklad (zkrácená verze) spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{n^2+1}{2n^2-3}.$$

Pro sudé členy

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^{2n}\frac{(2n)^2+1}{2(2n)^2-3}=\lim_{n\to\infty}1\cdot\frac{4n^2+1}{8n^2-3}\overset{VOAL}{=}4/8$$

a pro liché

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^{2n-1}\frac{(2n-1)^2+1}{2(2n-1)^2-3}=\lim_{n\to\infty}-1\cdot\frac{4n^2-4n+1+1}{4n^2-4n+1-3}\overset{VOAL}{=}-4/8.$$

Dle věty o limitě vybrané posloupnosti vyplývá, že původní posloupnost nemá limitu.

A nyní jak ne: nejprve počítáme a až pak použijeme VOAL. Příklad by vypadal takto:

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n\frac{n^2+1}{2n^2-3}=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\frac{n^2}{n^2}\frac{1+\frac{1}{n^2}}{2-\frac{3}{n^2}}\overset{VOAL}{=}\lim_{n\to\infty}(-1)^n\frac{1}{2},$$

což nemá limitu, tedy původní limita neexistuje.

Tento postup **je nekorektní a nesprávný** neboť použití VOALu vyžaduje, aby limita vpravo existovala, což jsme nesplnili a vlastně jsme nic nespočetli.

4. VOAL používáme až úplně na konci příkladu. Tedy

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n^2+3}{2n^2}&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+1/n}\cdot\frac{1+3/n^2}{2}\\&\overset{VOAL}{=}\frac{\lim_{n\to\infty}1}{\lim_{n\to\infty}1+\lim_{n\to\infty}1/n}\cdot\frac{\lim_{n\to\infty}1+\lim_{n\to\infty}3/n^2}{\lim_{n\to\infty}2}=1/2,\end{aligned}$$

místo

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n^2+3}{2n^2}&\overset{VOAL}{=}\lim_{n\to\infty}1\cdot\frac{1+3/n^2}{2}\\&\overset{VOAL}{=}\frac{\lim_{n\to\infty}1+\lim_{n\to\infty}3/n^2}{\lim_{n\to\infty}2}=1/2,\end{aligned}$$

5. Do písemek nepíšeme znění vět, stačí jejich název. Vyvarujeme se tak možnosti napsat větu špatně a tím výroby zbytečné chyby. Co tam ale musí být, tak ověření předpokladů věty. Tedy zda je posloupnost nezáporná (když má být nezáporná), kladná, zda limita existuje...

   Také pozor na implikace. Týká se věty o převodu $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ na $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$. Platí jen jedním směrem.

   Některé věty děláme "na dluh". Tedy, používáme věty a až když na konci příkladu zjistíme, že limita existuje, že dává smysl, tak jsme zjistili, že bylo použití věty korektní. Na toto pozor u VOAL.

6. Ne vše je "VOAL", i když je to svůdná věta. Někdy tam nepatří vůbec nebo tam patří i něco jiného, třeba věta o limitě odmocniny.

7. Některé věci netřeba ověřovat, příkladem je limita geometrické posloupnosti a posloupností typu $1/n^\alpha$.

8. Pokud limita neexistuje, je třeba napsat proč. Tedy že jsme našli dvě podposloupnosti s různou limitou.

9. Vyhýbáme se sofistikovaným tvrzením, není to špatně, ale je to riskantní. Když napíšeme, že $\sin x \leq 1$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$, je to stejně dobré, jako že $\sup \sin x = 1$. Rozdíl je v tom, že u druhého zápisu se někdo zaručeně zeptá, zda znáte definici suprema a cože to vůbec je.

10. Ježto máme větu o limitě odmocniny, není nutno na limitu odmocnin používat policajty (první verse je rychlejší). Toto platí pro odmocniny "pevné", tedy druhou, desátou, osmou. **Nikoli pro n-tou.**

11. Větu o aritmetice limit (VOAL) je možno použít jen na konečné součty. Tedy nikoli na výraz typu
$$\frac{1}{n^n} + \frac{1}{n^{n-1}} + \cdots \frac{1}{n},$$
neboť se zvyšujícím se n roste počet sčítaných členů.

12. Vyjde-li nám, že $a_n \geq b_n$, kde $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, není třeba hledat druhého policajta.

13. Děláme-li odhad $a_n < b_n$ musíme být schopni jej dokázat, buď je zjevný, nebo musíme umět udělat indukci. Pokud to z nějakého důvodu vypadá obtížně, nutno zvolit jiný odhad. Ten první totiž nemusí být správny (otestujeme dosazením vysokého čísla (10^4 za n).

14. Zapamatujeme si užitečné vzorce typu
$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$
a
$$y^z = e^{\ln y^z} = e^{z \ln y},$$
které dává podmínku $y > 0$, a vzorce pro $a^2 - b^2$, $a^3 - b^3$ a binomickou větu.

15. Dáváme si pozor na vlastní překlepy, aby se nám postupně z n^{n^2} nestalo $(n^n)^2$ apod.

16. Pečlivě dopisovat příklad až do konce. Může být otravné opisovat dokola součin tří odmocnin, ale je lepší jej tam napsat. Pokud už jej označíme nějakým písmenem, dáváme si záležet, aby záleželo na n, tedy nikoli r, ale r_n.

17. Nelze psát

$$\frac{4^n}{3^n} = a,$$

neboť výraz vlevo je posloupnost, kdežto vpravo číslo.Místo toho píšeme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4^n}{3^n} = a$$

nebo

$$\frac{4^n}{3^n} = a_n.$$