Tabulkové limity

1 Limity posloupností

1. (a)
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

   (b) pro $a > 1$ je
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

   (c) Pro $\beta > 0$ a $a > 1$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\beta}{a^n} = 0.$$

   (d) Pro $\alpha > 0$ (tj. libovolně velké) a pro $\beta > 0$ (tj. libovolně malé)
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln^\alpha n}{n^\beta} = 0.$$

   (e)
$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

2. Nechť $a > 0$.

   (a)
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

   (b)
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

   (c)
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^a} = 1$$

   (d)
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$$

2 Řady

1. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ konverguje právě když $|q| < 1$.
2. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}$ konverguje pro $\alpha < -1$ a diverguje pro $\alpha \geq -1$.
3. Řada
$$\sum_{n=2}^{\infty} n^{\alpha} \ln^{\beta} n$$
konverguje právě tehdy, když
$\alpha < -1$ a $\beta \in \mathbb{R}$
nebo
$\alpha = -1$ a $\beta < -1$.

První fakt o „goniometrických“ řadách. Řady
$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin kx, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \cos kx$$
sice divergují (mimo $x = 0$ modulo 2π u sinové řady), ale pro každé $x \in \mathbb{R}$ mají stejně omezené částečné součty.

3 Funkce

1. (a)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

(b)
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

(c)
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

(d)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

(e)
$$\lim_{x\to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

2. $\alpha > 0, \beta > 0, a > 1$:

(a)
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln^\alpha x}{x^\beta} = 0$$

(b)
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^\beta}{a^x} = 0.$$

(c) $n \in \mathbb{N}$
$$\lim_{x\to 0+} x^n \ln x = 0$$

3. (a)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin\, x}{x} = 1$$

(b)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan\, x}{x} = 1$$

(c)
$$\lim_{x\to \infty} \arctan\, x = \frac{\pi}{2}$$

(d)
$$\lim_{x\to -\infty} \arctan\, x = \frac{-\pi}{2}$$

4 Ostatní limity

Limity v této sekci jsou sice známé, ale pokud se objeví v písemce, je nutno je vyřešit a nelze je brát za tabulkové.

1. $$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$$

2. $$\lim_{x\to 0} \frac{\tan\, x}{x} = 1$$

3. $$\lim_{x\to 1-} \frac{\arccos\, x}{\sqrt{1-x}} = \sqrt{2}$$

4. $$\lim_{x\to \infty} x\mathrm{arccotg}\, x = 1$$

5. $$\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e$$

6. Řady
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^\alpha}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^\alpha}$$
konvergují absolutně pro $\alpha > 1$.

   Sinová řada konverguje neabsolutně pro $0 < \alpha \leq 1$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, absolutně však pouze pro $x = 2n\pi$, kde n je celé číslo (pak je řada nulová).

   Kosinová řada konverguje neabsolutně pro $x \in \mathbb{R}$ různá od $2n\pi$, kde n je celé číslo, pro $x = 2n\pi$ diverguje. Pro $\alpha \leq 0$ řady vždy divergují.

   Speciálně řady $\sum_k |\sin k|/k$ a $\sum_k |\cos k|/k$ divergují.

5 Ostatní vzorce

1. $$A^n - B^n = (A-B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + A^{n-3}B^2 + \cdots + B^{n-1})$$

2. $$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$$

3. $$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

4.
$$a^b = e^{b \ln a}$$

5.
$$\ln a + \ln b = \ln(ab)$$

6.
$$\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$$

7.
$$1 + 2 + \cdots + n = n(n+1)/2$$

8.
$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$$

9.
$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$$

10.
$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

11.
$$1 - \frac{1}{k^2} = \frac{k^2-1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k^2}$$

6 Návody

6.1 Limity

1. Větu o aritmetice limit používáme vždy až nakonec. Tedy neustále opisujeme všechny výrazy, pak napíčeme nad rovnítko VOAL a "dosadíme". Rozhodně nedosazujeme dřív.

2. Limity typu $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ převádíme na
$$\lim_{x\to a} e^{g(x)\ln f(x)}$$
a aplikujeme větu o limitě složené funkce. Využíváme toho, že vnější funkce exp je spojitá na $\mathbb{R}$. Tady pozor jedině na případ, kdy vyjde $\lim g \ln f = \pm\infty$. Pak nelze využít spojitosti a je třeba použít podmínku (P2).

3. Limity typu 1^∞ řešíme pomocí limity $\lim_{y\to 1} \frac{\ln y}{y-1} = 1$, neboť (zkráceně psáno) platí
$$\lim f^g = \exp[\lim g \ln f] = \exp[\lim \left(\frac{\ln f}{f-1}\right) \cdot \lim g(f-1)] = \exp[\lim g(f-1)].$$

4. VOAL, l'Hospital, VOLSF jsou **na dluh**. To znamená, že je lze použít za podmínky, že pravá strana existuje. Tedy se někde v textu musí objevit, že jelikož pravá strana je dobře definovaná a limity existují, tak bylo použití VOAL, l'Hospitala, VOLSF korektní

5. Vytýkáme **nejrychleji rostoucí výraz** ve zlomku (ale třeba i v logaritmu).

6. Používání **známých limit** sin, cos, tg , ln v 0 (a logarimus i v 1).

7. Využíváme s výhodou **goniometrické vzorce**.

8. Sin a cos, tan a cotan v jiném bodě než v 0 lze posunout pomocí substituce (např. $y\pi/2 - x$).

6.2 Limity posloupností

9. Heineho používáme u výpočtu limity posloupnosti vždy, když chceme použít VOLSF (Větu o limitě složené **funkce**). Přepíšeme všechna n na x a spočteme limitu funkce. V této fázi používáme VOLSF a ověřujeme její podmínky.

   Pak z Heineho napíšeme, že limita posloupnosti je totožná. Musí se tam objevit klíčové slovo **Heine**.

   Totéž platí, když chceme použít **l'Hospitala**. Nelze derivovat posloupnost.

   Analogicky, musíme-li ověřit, že je **posloupnost monotónní**, typicky u řad, lze to zjistit za pomoci derivace. Také Heine.

10. Vidíme-li **odmocninu**, která dává nedefinovaný výraz (např. $\sqrt{\infty} - \sqrt{\infty}$), tak rozšiřujeme, abychom se jí zbavili.

11. Posloupnosti **n-té odmocniny** něčeho na n-tou - dva policajti nebo věta, jež to převede na podíl a_{n+1}/a_n.

12. Pro **absolutní hodnotu** je někdy třeba počítat limity a derivace nadvakrát, rozpůlte tu úlohu.

13. **Celá část** se řeší obvykle odhadem: $x - 1 < [x] \leq x$.

6.3 Řady

14. U řad dáváme velký pozor, zda-li je řada s nezápornými členy, a jaké kritérium používáme.

15. Začneme průzkumem, zda má řada nezáporné členy či nikoli a vyzkoušíme nutnou podmínku konvergence

16. Použijeme vhodné kritérium, čímž to převedeme na otázku limity posloupnosti a dále postupuji jako u posloupností (Heine, 2 policajti, ...)

7 Které věci si vyžadují zdůvodnění

Některé věci je třeba do písemky napsat. Co používám a ověřené podmínky.

Prakticky: nepište znění vět, ale ani čísla. Pište jejich jméno, každá věta se nějak jmenuje (seznam je ve zkouškových požadavcích na webu), třeba Věta o aritmetice limit, o dvou policajtech, Rolleova, L' Hospitalovo pravidlo atd. A pak ověřené předpoklady.

Co je nutno zmínit:

- Věta o artimetice limit, o dvou policajtech, že je něco známá limita.
- Kritéria konvergence, nezapomeňte na srovnávací a na linearitu řad, že absolutně konvergentní řada konverguje
- Předpoklady kritérií (typicky nezápornost)
- Opět aritmetika limit, limita složené funkce. Známé limity netřeba dokazovat, ale napsat, že je to známá limita.
- Aritmetika derivací, limita derivací. Pozor, také aritmetika derivací má nějaké podmínky.
- L'Hospital a který (0/0 nebo něco/∞).
- Poznatky týkající se vztahu derivace a monotonie, konvexity, věty o asymptotách.
- Součet spojitých funkcí je spojitý atd.
- Obecně nezapomenout na předpoklady (spojitost a tak) a na podmínky obecně (ve jmenovateli se obvykle nevyskytuje nula...)

8 Co s sebou

Nezbytně nutně: průkaz totožnosti či index.

Dále tužka, propiska, guma, hodí se i milimetrový nebo čtverečkovaný papír, pastelka (stačí jedna na obtáhnutí grafu funkce) a pravítko

Co oceníte: tabulky, vzorce, zápisky z přednášky, poznámky ze cvičení, všelijaké taháky, jelikož je lepší mít důležité věty na jednom papíře, než pořád listovat v množství knih, postup vyšetřování průběhu funkce, známé limity, nerovnosti a konvergentní (divergentní) řady, řešené příklady, spočítanou vzorovou písemku, tabulku derivací