Teorie k funkcím

Teorie

Definice 1. *Reálnou funkcí jedné reálné proměnné* rozumíme zobrazení $f : M \to \mathbb{R}$, kde $M \subset \mathbb{R}$.

Definice 2. Nechť $c \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Potom definujeme

- *okolí bodu* c jako $B(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$
- *prstencové okolí bodu* c jako $P(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \setminus \{c\}$

Okolí a prstencové okolí bodu ∞ (resp $-\infty$) definujeme takto:

- $B(\infty, \varepsilon) = P(\infty, \varepsilon) = (1/\varepsilon, \infty)$
- $B(-\infty, \varepsilon) = P(-\infty, \varepsilon) = (-\infty, -1/\varepsilon)$

Definice 3. Nechť $f : M \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}$. Řekneme, že f má v bodě $a \in \mathbb{R}^*$ *limitu* rovnou $A \in \mathbb{R}^*$, jestliže platí

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall x \in \mathcal{P}^{\delta}(a) : \quad f(x) \in \mathcal{B}(A, \varepsilon).$$

V takovém případě píšeme

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

Definice 4. Nechť $f : M \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}$, $a \in M$. Řekneme, že f je *spojitá v bodě* a, jestliže

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Věta 5 (O aritmetice limit)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x \to a} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$ a $\lim_{x \to a} g(x) = B \in \mathbb{R}^*$. Pak

(a) $\lim_{x \to a}(f(x) + g(x)) = A + B$, pokud je výraz $A + B$ definován;

(b) $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = AB$, pokud je výraz AB definován;

(c) $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$, pokud je výraz $\frac{A}{B}$ definován.

Poznámka 6. Jsou-li funkce f, g spojité v bodě $a \in \mathbb{R}$, pak také funkce $f + g$ a fg jsou spojité v bodě a. Je-li navíc $g(a) \neq 0$, pak také funkce $\frac{f}{g}$ je spojitá v bodě a.

Věta 7 (O limitě a uspořádání)**.** (a) Nechť $a \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x \to a} f(x) > \lim_{x \to a} g(x)$. Pak existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\forall\, x \in \mathcal{P}^{\delta}(a) : \quad f(x) > g(x).$$

(b) Nechť existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\forall\, x \in \mathcal{P}^{\delta}(a): \quad f(x) \le g(x).$$

Nechť existují $\lim_{x\to a} f(x)$ a $\lim_{x\to a} g(x)$. Pak

$$\lim_{x\to a} f(x) \le \lim_{x\to a} g(x).$$

(c) (*dva policajti pro funkce*) Nechť existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\forall\, x \in \mathcal{P}^{\delta}(a): \quad f(x) \le g(x) \le h(x).$$

Nechť

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = A \in \mathbb{R}^*.$$

Pak

$$\lim_{x\to a} g(x) = A.$$

(d) (*jeden policajt pro funkce*) Nechť existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\forall\, x \in \mathcal{P}^{\delta}(a): \quad f(x) \le g(x).$$

Nechť

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty.$$

Pak

$$\lim_{x\to a} g(x) = \infty.$$

Věta 8 (O limitě složené funkce)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}^*$ a nechť funkce f a g splňují

$$\lim_{x\to a} g(x) = A \in \mathbb{R}^*, \quad \lim_{y\to A} f(y) = B \in \mathbb{R}^*.$$

Je-li navíc splněna alespoň jedna z podmínek

(P1) f je spojitá v A;

(P2) $\exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in \mathcal{P}^{\delta}(a): \quad g(x) \ne A$;

pak $\lim_{x\to a} f(g(x)) = B$.