Eulerova konstanta

Věta 1 (Definice Eulerova čísla)**.** Dokažte, že posloupnost

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \qquad n = 1, 2, \dots$$

je ostře rostoucí a omezená a že posloupnost

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \qquad n = 1, 2, \dots$$

je ostře klesající a omezená. Odtud pak odvďte, že obě tyto posloupnosti mají společnou limitu, která se označuje písmenem e.

Návod: Ukázat, že posloupnost x_n je rostoucí, vlastně znamená ukázat nerovnost $x_{n+1} > x_n$, což pro nezáporné posloupnosti je ekvivalentní nerovnosti $\frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$. Odhadujeme

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{(n+2)n}{(n+1)^2}\right)^n \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \cdot \frac{n+2}{n+1} \geq$$

použitím Bernoulliovy nerovnosti

$$\geq \left(1 - \frac{n}{(n+1)^2}\right) \cdot \frac{n+2}{n+1} = \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 2}{(n+1)^3} = \frac{(n+1)^3 + 1}{(n+1)^3} > 1.$$

Posloupnost $\{x_n\}$ je omezená, neboť zjevně $x_n \leq y_n$, a y_n je omezená a klesající, což uvidíme za chvíli, takže $0 < x_n \leq y_n \leq y_1$. Protože posloupnost $\{x_n\}$ je monotónní a omezená, musí mít vlastní limitu, označme e_1.

Ukázat, že posloupnost $\{y_n\}$ je klesající, lze analogicky. Dokazujeme nerovnost $y_n < y_{n-1}$, což je ekvivalentní nerovnosti $\frac{y_{n-1}}{y_n} > 1$. Uvažme tedy

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{n^2}{(n-1)(n+1)}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1} =$$

$$= \left(\frac{n^2 - 1 + 1}{n^2 - 1}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n^2 - 1}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1} \geq$$

podle Bernoulliovy nerovnost

$$\geq \left(1 + \frac{n}{n^2 - 1}\right) \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{(n^2 + n + 1)n}{(n^2 - 1)(n+1)} = \frac{n^3 + n^2 + n}{n^3 + n^2 - n - 1} =$$

$$= \frac{n^3 + n^2 - n - 1 + 2n}{n^3 + n^2 - n - 1} = 1 + \frac{2n}{n^3 + n^2 - n - 1} > 1.$$

To, že posloupnost (y_n) je omezená, lze nahlédnout,neb $0 < y_n \leq y_1$. Protože posloupnost $\{y_n\}$ je monotónní a omezená, musí mít vlastní limitu, označme ji e_2.

Zbývá ukázat, že obě posloupnosti konvergují k téže limitě. To lze učinit například takto: snadno se zjistí, že $y_n = x_n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)$. Proto

$$e_2 = \lim y_n = \lim \left[x_n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right] = \lim x_n \cdot \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e_1 \cdot 1 = e_1.$$

Je tedy $e_1 = e_2$, obě posloupnosti konvergují k téže limitě, kterou můžeme označit e.