

Konvergence řad – příklady z písemných prací ZS

A. Vyšetřete konvergenci (případně absolutní konvergenci) následujících řad.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+n} - \sqrt[3]{n^3+n}}{\sqrt{n^3}}$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4^n}\right) \sin(2^n)$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{arctg}\left(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}\right)$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi) \cdot \frac{\operatorname{arctg} n}{n}$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{(-1)^n}{\log(\log n)} \right)$$

$$6^*. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \log\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right) \text{ (Pomocí Taylorova rozvoje logaritmu.)}$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/4)}{\binom{2n}{n}}$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)}{\sqrt[3]{n^2+1} - \sqrt[3]{n^2}}$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + \frac{100}{n}}$$

$$10^*. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n} - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n}\right) \right) \text{ (pomocí Taylorova rozvoje arctg; pro vyšetření, zda řada konverguje (neabsolutně), není potřeba)}$$

$$11^*. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \sin\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \text{ (pomocí Taylorova rozvoje sin)}$$

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2+1} - \sqrt[3]{n^3-1} \right)$$

$$13^*. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n - 1 \right) \text{ (pomocí Taylorova rozvoje)}$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^{n^2}}{1 + 2^n + 3^n}$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log n} \operatorname{arctg}\left((-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+2}$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^{n^2}}$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt[n]{3} - 1 \right)$$

$$19. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{3}{2^n - 2n}$$

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + (-1)^n n}{3^n + (-1)^n n}$
21. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^3 + 1} - \sqrt{n^3 - 1} \right)$
22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{n}$
23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi) \sqrt{n+7}}{\sqrt{n} \sqrt{n+1}}$
24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{5^n}$
25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{4^n + 5^n}$
26. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin n}{n \sqrt{n}}$
27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt[n]{n}}$
28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n - 2^{(n^2)}}{3^{(n^2)}}$
29. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt{n^4 + n^2 - 1} - \sqrt{n^4 - n^2 + 1} \right)$
30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\operatorname{arctg} n + \operatorname{arctg}(n^2) - 2)^5}{n^2}$
31. $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi) \cdot \left(\sqrt[3]{1+n^3} + \sqrt[3]{1-n^3} \right)$
32. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{(n^2)}}{(n!)^n}$
33. $\sum_{n=1}^{\infty} \log \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)$
34. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \arccos \frac{1}{n}$
35. $\sum_{n=2}^{\infty} \arcsin \left(\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1} \right) \sqrt{\sin \left(\frac{1}{n} \right)}$
36. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} \right) \frac{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}}{\left(\sin \left(\frac{1}{n} \right) \right)^{10/3}}$

B. Vyšetřete konvergenci (případně absolutní konvergenci) následujících řad v závislosti na parametru.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(3 + \frac{\log n}{n} \right)^n x^n, x \in \mathbb{R}, x \geq 0$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n!} e^{nx}, x \in \mathbb{R}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 2^{-n}} \frac{y^n}{n}, y \in \mathbb{R}$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1+a^n}, a \in \mathbb{R}$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} n^x \sin\left(\frac{1}{n^2}\right), x \in \mathbb{R}$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{n}\right)x\right]^n, x \in \mathbb{R}$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1} (\sin x)^n, x \in \mathbb{R}$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} (\log(n+1) - \log n)^3 (\sqrt{n+1})^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$$

$$9^*. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(1/n) - 1/n}{n^\alpha}, \alpha \in \mathbb{R} \text{ (pomocí Taylorova rozvoje)}$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}}}{(n+1)^\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1}{n^\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$$

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n\alpha}}{n!}, \alpha \in \mathbb{R}$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n+a} - \sqrt[4]{n^2+n}, a \in \mathbb{R}$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\log\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)\right)^{\frac{a}{7}}, a \in \mathbb{Z}$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} n^x \sin\left(\frac{1}{n^2}\right), x \in \mathbb{R}$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)^n}{n^{n+2}} (1+x)^n, x \in \mathbb{R}$$

$$17^*. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{n} - \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)}{n^\beta}, \beta \in \mathbb{R}. \text{ (Užijte srovnávací kritérium a l'Hopitalovo pravidlo nebo Taylorův rozvoj čitatele.)}$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n^{n+3}} (2+x)^n, x \in [-2, +\infty)$$

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+3) \left(2 + \frac{1}{3n}\right)^n}, x \in [0, +\infty)$$

C. Řešte.

1. Napište příklad posloupnosti $\{a_n\}$ takové, aby řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergovala a řada $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ konvergovala.

2. Je pravda, že konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, pak konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$? Pokud ne, uveďte příklad. Pokud ano, svou odpověď pečlivě zdůvodněte.

3. Může se stát, že řady $\sum a_n$ a $\sum b_n$ divergují, ale řada $\sum (a_n + b_n)$ konverguje? Pokud ano, uveďte příklad. Pokud ne, svou odpověď pečlivě zdůvodněte.

4. Je pravda, že pokud řady $\sum a_n$ a $\sum b_n$ konvergují, potom konverguje i řada $\sum a_n b_n$? Pokud ne, uveďte příklad. Pokud ano, svou odpověď pečlivě zdůvodněte.

Výsledky A.

AK – absolutně konverguje, NK – neabsolutně konverguje, D – diverguje.

- | | | | |
|--------|-----------------|---------|--------|
| 1. AK | 2. AK | 3. NK | 4. NK |
| 5. NK | 6. NK | 7. AK | 8. D |
| 9. NK | 10. AK | 11. D | 12. ? |
| 13. ? | 14. D (odm. k.) | 15. NK | 16. NK |
| 17. AK | 18. NK | 19. AK | 20. AK |
| 21. AK | 22. D | 23. NK | 24. AK |
| 25. AK | 26. AK | 27. D | 28. AK |
| 29. D? | 30. AK | 31. AK? | 32. AK |
| 33. AK | 34. D | | |

Výsledky B.

Nejprve uvádíme interval, potom příslušný typ konvergence.

AK – absolutně konverguje, NK – neabsolutně konverguje, D – diverguje.

1. $x \in [0, \frac{1}{3})$ AK, $x \geq \frac{1}{3}$ D
2. $x \in \mathbb{R}$ AK
3. $x \in (-2, 2)$ AK, $x = -2$ NK, jinak D
4. $x \in (-1, 1)$ AK, jinak D
5. $x < 1$ AK, jinak D
6. $x \in (-2, 2)$ AK, jinak D
7. $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}\}$ AK, jinak D
8. $\alpha < 4$ AK, jinak D
9. $\alpha > -2$ AK, jinak D
10. $\alpha > 0$ AK, jinak D
11. $\alpha > 0$ AK, jinak D
12. $\alpha < 1$ AK, jinak D
13. $a = \frac{1}{2}$ AK, jinak D
14. Pro $a > 7$ AK (srovnání s $n^{-a/7}$), pro $a = 1, 3, 5, 7$ NAK (Leibniz), jinak D. (pro $a = 2, 4, 6$ má nezáporné členy, lze užít výsledek pro AK; pro $a < 0$ není splněna nutná podmínka)
15. ?
16. ?

Výsledky C.

1. Například $a_n = (-1)^n$.
2. NE. Například $a_n = (-1)^n$.
3. ANO. Například $a_n = (-1)^n$, $b_n = (-1)^{n+1}$.
4. NE. Např. $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.