26. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Příklady

1.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2kx}{x^2+k^2},$$

$x \in \mathbb{R}$.

Řešení:

Pokud $x = 0$, řada má nulové koeficienty a konverguje. Pokud $x \neq 0$, použijeme limitní srovnávací kritérium. Platí, že

$$\lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{arctg} y}{y} = 1,$$

odkud vyplývá (substitucí $y = \frac{2kx}{x^2+k^2}$), že

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\operatorname{arctg} \frac{2kx}{x^2+k^2}}{\frac{2kx}{x^2+k^2}} = 1,$$

a proto řada $\sum_k \operatorname{arctg} \frac{2kx}{k^2+x^2}$ konverguje, právě když konverguje řada $\sum_k \frac{2kx}{x^2+k^2}$. Jednoduchým srovnáním ale dostaneme, že od určitého členu počínaje, kdy je $k^2 \geq x^2$, platí

$$\frac{2kx}{x^2+k^2} \geq \frac{2kx}{2k^2} = \frac{x}{k},$$

přičemž řada napravo diverguje pro každé $x \neq 0$.

Závěr. Řada konverguje pro $x = 0$, jinak diverguje.

2.
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)$$

Řešení:

Snadno se ověří, že všechny koeficienty $a_n = n^3\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$ jsou nezáporné. Ukážeme, že $a_n \not\to 0$ pro $n \to \infty$. Je totiž

$$\lim_{n\to\infty} n^3\left(1-\cos\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} n \cdot \frac{1-\cos\frac{1}{n}}{(\frac{1}{n})^2} = +\infty \cdot \frac{1}{2} = +\infty,$$

kde pro výpočet limity posledního zlomku použijeme Heineho větu, substituci $x = \frac{1}{n}$ a limitu $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

3.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln^2 n} \cos \frac{\pi n}{n+1}$$

Řešení:

Protože $\cos \frac{\pi n}{n+1} \searrow \cos(\pi) = -1$, řada konverguje neabsolutně použitím Leibnizova kritéria na $\sum \frac{(-1)^n}{\ln^2 n}$ a posléze Abelova kritéria na $\sum a_n b_n$, kde $a_n = \frac{(-1)^n}{\ln^2 n}$ a $b_n = \cos \frac{n\pi}{n+1}$.

Řada nekonverguje absolutně, neboť od nějakého N počínaje platí, že

$$\frac{1}{\ln^2 n} \left| \cos \frac{\pi n}{n+1} \right| \geq \frac{1}{\ln^2 n} \cdot \frac{1}{2}.$$

Na řadu napravo lze použít např. srovnání s harmonickou řadou.

4.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(k^{(k^2+1)^{-1}} - 1 \right)$$

Řešení:

Protože

$$\left(k^{(k^2+1)^{-1}} - 1 \right) = e^{\frac{\ln k}{k^2+1}} - 1$$

a výraz v exponentu konverguje pro $k \to \infty$ k nule (například podle Heineho věty a l'Hopitalova pravidla), dostáváme s přihlédnutím k Heineho větě, větě o limitě složené funkce a základní limity $\frac{e^x - 1}{x} \to 1$ pro $x \to 0$, že

$$\lim_{k \to \infty} \frac{e^{\frac{\ln k}{k^2+1}} - 1}{\frac{\ln k}{k^2+1}} = 1.$$

Podle limitní verze srovnávacího kritéria tedy vyšetřovaná řada konverguje, právě když konverguje řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k^2+1}.$$

Ukážeme, že tato řada konverguje. K tomu nám poslouží dvojice odhadů

$$\frac{\ln k}{k^2+1} \leq \frac{\ln k}{k^2} = \frac{\ln k}{\sqrt{k}} \cdot \frac{1}{k^{3/2}} \leq \frac{1}{k^{3/2}},$$

přičemž první nerovnost platí pro každé k přirozené, o druhé ukážeme, že existuje přirozené N takové, že platí pro každé $k > N$. Jestliže tak učiníme, potom konvergence plyne ze srovnávacího kritéria a konvergence řady $\sum \frac{1}{k^p}$ pro $p >> 1$.

Tvrdíme tedy, že existuje přirozené N takové, že pro každé $k > N$ je

$$\frac{\ln k}{\sqrt{k}} \leq 1.$$

Podle Heineho věty a l'Hopitalova pravidla máme, že

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln k}{\sqrt{k}} = 0.$$

Volme tedy $\epsilon = 1$. Z definice limity vyplývá, že existuje N přirozené tak, že pro každé $k > N$ je $|\frac{\ln k}{\sqrt{k}} - 0| < \epsilon$, a tudíž, protože číslo nalevo je kladné, je $\frac{\ln k}{\sqrt{k}} < \epsilon = 1$. Tím je tvrzení dokázáno.

5.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n+1} \frac{1}{\sqrt[100]{n}}$$

Řešení:

Protože $\frac{n-1}{n+1} \nearrow 1$, řaqda konverguje neabsolutně použitím Leibnizova kritéria na $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt[100]{n}}$ a posléze Abelova kritéria na $\sum a_n b_n$, kde $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt[100]{n}}$ a $b_n = \frac{n-1}{n+1}$.

Řada nekonverguje absolutně srovnáním s řadou $\sum \frac{1}{\sqrt[100]{n}}$ a použitím limitního srovnávacího kritéria.

6.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin n^{-1} \ln \frac{n+1}{n}$$

Řešení:

Položme $a_n = \sin n^{-1} \ln \frac{n+1}{n}$. Ukážeme, že a_n lze porovnat s $\frac{1}{n^2}$ a tudíž řada podle limitní verze srovnávacího kritéria konverguje. Podle Heineho věty a substituce $x = \frac{1}{n}$ totiž máme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(\frac{n+1}{n})}{\frac{n+1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{1+\frac{1}{n}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1,$$

takže použitím obou limit dohromady dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1.$$

7.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n}{n^2+1}$$

Řešení:

S přihlédnutím k Heineho větě totiž jednoduchým rozšířením dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{n}{n^2+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{n}{n^2+1}}{\frac{n}{n^2+1}} \cdot \frac{n^2}{n^2+1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{n}{n^2+1}}{\frac{n}{n^2+1}} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot 1 = 1 \cdot 1 = 1.$$

Řada tudíž diverguje srovnáním s harmonickou řadou.

8.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+k^2}\right)$$

Řešení:

Platí, že

$$\sin\left(\pi\sqrt{n^2+k^2}\right) = \sin\left(\pi\sqrt{n^2+k^2} - n\pi + n\pi\right) =$$

$$= \sin\left(\pi\sqrt{n^2+k^2} - n\pi\right)\cos(n\pi) = (-1)^n \sin\left(\frac{k^2}{n+\sqrt{n^2+k^2}}\pi\right).$$

Položme tedy

$$a_n = (-1)^n \sin\left(\frac{k^2}{n+\sqrt{n^2+k^2}}\pi\right).$$

Řada $\sum a_n$ konverguje neabsolutně podle Leibnitzova kritéria, protože $\sin\left(\frac{k^2}{n+\sqrt{n^2+k^2}}\pi\right) \searrow 0$ (jmenovatel monotónně roste nade všechny meze). Řada ale nekonverguje absolutně, jak vyplývá z limitního srovnávacího kritéria a srovnání

$$\lim \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = \lim \frac{\sin\left(\frac{k^2}{n+\sqrt{n^2+k^2}}\pi\right)}{\frac{k^2}{n+\sqrt{n^2+k^2}}\pi} \cdot \frac{nk^2}{n+\sqrt{n^2+k^2}}\pi = 1 \cdot \frac{k^2\pi}{2}.$$

9.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(k^{k^a} - 1\right)$$

Řešení:

Pokud $a \geq 0$, pak $\lim \left(k^{k^a} - 1\right) = +\infty$, řada tedy diverguje, neboť není splněna základní podmínka konvergence $\lim a_k = 0$.

Pokud $a < 0$, pak platí
$$k^{k^a} - 1 = e^{k^a \ln k} - 1,$$
a tudíž (podle Heineho věty a věty o limitě složené funkce s přihlédnutím k faktu, že $\lim_{x \to +\infty} x^a \ln x = 0$ pro $a < 0$)
$$\lim_{k \to \infty} \frac{k^{k^a} - 1}{k^a \ln k} = \lim_{k \to \infty} \frac{e^{k^a \ln k} - 1}{k^a \ln k} = 1.$$
Stačí tedy podle limitního srovnávacího kritéria vyšetřit řadu
$$\sum_{k=1}^{\infty} k^a \ln k$$
pro $a < 0$. O této řadě víme, že pro $0 > a \geq -1$ je divergentní a pro $a < -1$ řada konverguje.

10.
$$\sum_{n=10}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[n]{n}}{\ln \ln \ln n}$$

Řešení:

Řada konverguje neabsolutně. Nahlédnout to lze nejprve použitím Leibnizova kritéria na řadu
$$\sum \frac{(-1)^n}{\ln \ln \ln n}$$
a posléze Abelova kritéria na $\sum a_n b_n$, kde $a_n = \frac{(-1)^n}{\ln \ln \ln n}$ a $b_n = \sqrt[n]{n}$ (je potřeba dokázat, že b_n je omezená a monotónní posloupnost, což lze udělat například pomocí monotonie funkce $x^{1/x}$, kterou lze vyšetřit užitím diferenciálního počtu).

Řada nekonverguje absolutně, neboť
$$\frac{\sqrt[n]{n}}{\ln \ln \ln n} \geq \frac{1}{\ln \ln \ln n} \geq \frac{1}{n}$$
(od určitého indexu počínaje).

11.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n + 1/n)}{\ln \ln n}$$

Řešení: Aplikujme součtový vzorec na čitatel, dostaneme
$$\frac{\sin(n + n^{-1})}{\ln(\ln n)} = \frac{\sin n \cos n^{-1}}{\ln(\ln n)} + \frac{\cos n \sin n^{-1}}{\ln(\ln n)}$$

Protože posloupnost se členy $b_n = 1/\ln(\ln n)$ konverguje monotónně do nuly a platí, že řady $\sum_n \cos n$ a také $\sum_n \sin n$ mají omezené částečné součty, řady

$$\sum_n \frac{\sin n}{\ln(\ln n)}, \qquad \sum_n \frac{\cos n}{\ln(\ln n)}$$

konvergují podle Dirichletova kritéria.

Je ovšem evidentní, že posloupnosti $\{\sin n^{-1}\}$ a $\{\cos n^{-1}\}$ jsou od jistého členu počínaje monotónní (neboť funkce sin a cos jsou monotónní na intervalu $(0, \pi/2)$). Z toho plyne, že podle Abelova kritéria konvergují řady

$$\sum_n \frac{\sin n}{\ln(\ln n)} \cdot \cos n^{-1}, \qquad \sum_n \frac{\cos n}{\ln(\ln n)} \cdot \sin n^{-1},$$

a tudíž konverguje (neabsolutně) i jejich součet.

Absolutní konvergenci můžeme vyloučit porovnáním s řadou $1/n$. (Třeba podle jednostranného limitního kritéria.)

12.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p},$$

$0 < x < \pi$.

Řešení:

Pro $p > 1$ konverguje absolutně srovnáním $|\frac{\sin nx}{n^p}| \leq \frac{1}{n^p}$. Pro $0 < p \leq 1$ nekonverguje absolutně, neboť

$$\sum \frac{|\sin nx|}{n^p} \geq \sum \frac{\sin^2(nx)}{n^p} = \sum \frac{1}{2n} - \sum \frac{\cos(2nx)}{n^p} = +\infty,$$

neboť druhá řada konverguje neabsolutně podle Dirichletova kritéria, zatímco první diverguje do $+\infty$.

Pro $0 < p \leq 1$ konverguje neabsolutně podle Dirichletova kritéria, pro $p \leq 0$ není splněna nutná podmínka konvergence, takže řada diverguje.

Použili jsme přitom faktu, že pro $x \neq 0$ mají posloupnosti $\{\sin(nx)\}$ a $\{\cos(nx)\}$ stejně omezené částečné součty. Nahlédnout to lze podobně jako v příkladu **??**.

13.

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{k^2+1} \cos \frac{1}{k}$$

Řešení:

Řada nekonverguje absolutně srovnáním s řadou $\sum_k \frac{1}{k}$, neboť limitní srovnávací kritérium dává

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\frac{k}{k^2+1} \cos \frac{1}{k}}{\frac{1}{k}} = \lim_{k \to \infty} \frac{k^2}{k^2+1} \cos \frac{1}{k} = 1.$$

Zkusíme aplikovat Leibnizovo kritérium. Zřejmě $\frac{k}{k^2+1}\cos\frac{1}{k} \to 0$ pro $k \to \infty$, musíme ale ověřit monotonii této posloupnosti (alespoň od nějakého členu počínaje). Derivováním dostaneme

$$\left(\frac{x}{x^2+1}\cos\frac{1}{x}\right)' = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}\cos\frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+1}\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$$

derivace je na nějakém okolí nekonečna spojitá a je nulová, pokud splňuje rovnici

$$\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}\cos\frac{1}{x} + \frac{1}{x(x^2+1)}\sin\frac{1}{x} = 0$$

$$-\frac{x(1-x^2)}{(x^2+1)} = \operatorname{tg}\frac{1}{x}$$

Je vidět, že pro $x \to +\infty$ levá strana konverguje k nekonečnu, zatímco pravá strana k nule, a proto rovnice na nějakém okolí nekonečna nemůže mít řešení a derivace nemůže měnit znaménko. Tudíž funkce musí být na nějakém okolí nekonečna monotónní, z čehož plyne monotonie posloupnosti.

Závěr: Řada konverguje neabsolutně, absolutně nikoliv.