25. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Definice 1. Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$, $x \in M$ a funkce f je definována alespoň na M.

- Řekneme, že f nabývá v bodě x svého
- **maxima na** M, jestliže platí
$$\forall y \in M\colon f(y) \leq f(x),$$
- **minima na** M, jestliže platí
$$\forall y \in M\colon f(y) \geq f(x)),$$
- **ostrého maxima na** M, jestliže
$$\forall y \in M,\ y \neq x\colon f(y) < f(x),$$
- **ostrého minima na** M, jestliže
$$\forall y \in M,\ y \neq x\colon f(y) > f(x).$$

Řekneme, že f nabývá v bodě x svého **lokálního maxima** (**lokálního minima, ostrého lokálního maxima, ostrého lokálního minima**) **na** M, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že f nabývá v bodě x svého maxima (minima, ostrého maxima, ostrého minima) na $M \cap B(x, \delta)$.

Věta 2 (nutná podmínka existence extrému)**.** Nechť I je nedegenerovaný interval, f je reálná funkce a a je vnitřním bodem I. Je-li a bodem lokálního extrému funkce f, pak buď $f'(a)$ neexistuje nebo $f'(a) = 0$.

Věta 3 (vztah derivace a monotonie)**.** Nechť I je interval a f je spojitá funkce na I. Nechť $\operatorname{Int} I$ označuje množinu všech vnitřních bodů intervalu I. Nechť existuje $f'(x)$ pro každé $x \in \operatorname{Int} I$. Potom

(i) je-li $f'(x) > 0$ pro každé $x \in \operatorname{Int} I$, pak je f rostoucí na I;

(ii) je-li $f'(x) \geq 0$ pro každé $x \in \operatorname{Int} I$, pak je f neklesající na I;

(iii) je-li $f'(x) < 0$ pro každé $x \in \operatorname{Int} I$, pak je f klesající na I;

(iv) je-li $f'(x) \leq 0$ pro každé $x \in \operatorname{Int} I$, pak je f nerostoucí na I.

Definice 4. Nechť f je reálná funkce a $a \in \mathbb{R}$. Řekneme, že f má v bodě a **inflexi**, jestliže existuje vlastní $f'(a)$ a a existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ takové, že buď

- $$\forall x \in P_-(a,\delta) : \; f(x) > f(a) + f'(a)(x-a) \qquad \text{a}$$
  $$\forall x \in P_+(a,\delta) : \; f(x) < f(a) + f'(a)(x-a)$$

  nebo

- $$\forall x \in P_-(a,\delta) : \; f(x) < f(a) + f'(a)(x-a) \qquad \text{a}$$
  $$\forall x \in P_+(a,\delta) : \; f(x) > f(a) + f'(a)(x-a)$$

Věta 5 (nutná podmínka pro inflexi)**.** Nechť f je reálná funkce a $a \in \mathbb{R}$. Jestliže existuje $f''(a)$ a je různá od nuly, pak a není inflexním bodem funkce f.

Věta 6 (postačující podmínka pro inflexi)**.** Nechť f má spojitou první derivaci na intervalu (a,b) a $c \in (a,b)$. Předpokládejme, že

$$\forall x \in (a,c) : \; f''(x) > 0 \quad \text{a} \quad \forall x \in (c,b) : \; f''(x) < 0$$

nebo

$$\forall x \in (a,c) : \; f''(x) < 0, \quad \text{a} \quad \forall x \in (c,b) : \; f''(x) > 0.$$

Pak c je inflexním bodem f.

Definice 7. Nechť I je interval a nechť f je reálná funkce definovaná alespoň na I. Řekneme, že f je

- **konvexní** na I, jestliže

  $$\forall x,y \in I \; \forall \lambda \in (0,1) : \; f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y),$$

- **konkávní** na I, jestliže

  $$\forall x,y \in I \; \forall \lambda \in (0,1) : \; f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y),$$

- **ryze konvexní** na I, jestliže

  $$\forall x,y \in I, x \neq y \; \forall \lambda \in (0,1) : \; f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y),$$

- **ryze konkávní** na I, jestliže

  $$\forall x,y \in I, x \neq y \; \forall \lambda \in (0,1) : \; f(\lambda x + (1-\lambda)y) > \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Věta 8 (vztah druhé derivace a konvexity či konkávnosti)**.** Nechť f je spojitá funkce na intervalu $I \subset \mathbb{R}$ a nechť má f na $\operatorname{Int} I$ spojitou první derivaci. Jestliže je f' rostoucí na $\operatorname{Int} I$, pak f je ryze konvexní na I. Speciálně, je-li $f''(x) > 0$ pro každé $x \in \operatorname{Int} I$, pak f je ryze konvexní na I.

Definice 9. Nechť f je reálná funkce definovaná na nějakém okolí bodu ∞. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$. Řekneme, že f má v bodě ∞ **asymptotu** $ax + b$, jestliže

$$\lim_{x \to \infty} \big(f(x) - ax - b \big) = 0. \tag{1}$$

Analogicky definujeme asymptotu v bodě $-\infty$.

Věta 10 (tvar asymptoty)**.** Funkce f má v bodě ∞ asymptotu $ax + b$ právě tehdy, když

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R} \quad \text{a} \quad \lim_{x \to \infty} (f(x) - ax) = b \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Analogické tvrzení platí pro asymptotu v bodě $-\infty$.