24. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Příklady

1. (a)

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n\frac{\ln^2(n+1)}{(n-1)^2}$$

Řešení:
Budeme uvažovat limitu funkce:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln^2(x+1)}{(x-1)^2}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2\ln(x+1)}{x+1}}{2(x-1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x+1)}{(x+1)(x-1)}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x+1}}{2x}=0.$$

Z Heineho nyní máme, že

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln^2(n+1)}{(n-1)^2}=0.$$

Nyní ze dvou policajtů nebo z věty o omezené a mizející máme i, že

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n\frac{\ln^2(n+1)}{(n-1)^2}=0.$$

(b) Použijte l'Hospitala

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\tan\frac{1}{n}-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}}$$

Řešení: Budeme prve počítat limitu funkce, pomocí L'Hospitalova pravidla typu "0/0".

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x-\sin x}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-1}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x(1-\cos x)}=$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{\cos^2 x}=\frac{1+1}{1^2}=2.$$

Nyní použijeme Heineho, $x_n=\frac{1}{n}$, x_n je v definičním oboru funkce

$$\frac{\tan x-x}{x-\sin x},$$

$x_n\not=0$, $\lim\frac{1}{n}=0$.
Odtud

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\tan\frac{1}{n}-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}}=2.$$

(c)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c^n}{n},$$

$c > 1$.

Řešení: Převedeme na funkci:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{c^x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{x\ln c)}}{x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{c^x \ln c}{1} = \infty$$

Z Heineho plyne, že i původní limita

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c^n}{n} = \infty.$$

(d)

$$\lim_{n\to\infty} (\ln n)^{\frac{1}{n}}$$

Řešení:

Budeme počítat limitu funkce:

$$\lim_{x\to 0+} e^{(x\ln(\ln\frac{1}{x}))}$$

Tedy musíme spočíst

$$\lim_{x\to 0+} x\ln(\ln\frac{1}{x}) = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln(\ln\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{\ln\frac{1}{x}}\frac{1}{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{\ln\frac{1}{x}}x \overset{VOAL}{=} 0{\cdot}0$$

Nyní použijeme Heineho, verze zprava: $x_n = \frac{1}{n}$, $x_n \geq 0$, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, definiční obor je také ok. Tedy

$$\lim_{n\to\infty} (\ln n)^{\frac{1}{n}} = e^0 = 1.$$

(e)

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\cos\frac{3}{n}}{\cos\frac{5}{n}}\right)^{n^2}$$

Řešení:

Budeme řešit limitu funkce

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{\cos\frac{3}{x}}{\cos\frac{5}{x}}\right)^{x^2}$$

Prve přepíšeme na exponencielu:

$$\lim_{x\to\infty} \exp x^2 \ln\left(\frac{\cos\frac{3}{x}}{\cos\frac{5}{x}}\right)$$

Tedy řešíme:

$$\lim_{x\to\infty} x^2 \ln\left(\frac{\cos\frac{3}{x}}{\cos\frac{5}{x}}\right) = \lim_{x\to\infty} x^2 \ln(\cos\frac{3}{x}) - x^2\ln(\cos\frac{5}{x})$$

Podívejme se na limitu

$$\lim_{x\to\infty} x^2 \ln(\cos\frac{3}{x}) = \lim_{x\to\infty} x^2 \cdot \frac{\ln(\cos 3/x)}{\cos(3/x)-1}\cdot(\cos(3/x)-1) \overset{VOAL}{=}$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(\cos 3/x)}{\cos(3/x)-1}\cdot\lim_{x\to\infty}(\cos(3/x)-1)\cdot x^2$$

Rozebereme to na kousky s VOLSF: $\lim_{x\to\infty} 3/x = 0$, $\lim_{y\to 0}\cos y = 1$, dohromady (spojitost cosinu) máme

$$\lim_{x\to\infty}\cos 3/x = 1.$$

VOLSF podruhé: $\lim_{x\to\infty}\cos 3/x = 1$, $\lim y \to 1 \frac{\ln y}{y-1} = 1$, $\cos 3/x$ se vyhýbá své limitě (P2), dohromady

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\cos 3/x}{\cos 3/x - 1} = 1.$$

Nyní druhá limita:

$$\lim_{x\to\infty}(\cos(3/x)-1)\cdot x^2 = \lim_{x\to\infty} -9\frac{(1-\cos(3/x))}{\frac{9}{x^2}} = -\frac{9}{2},$$

neb z VOLSF: $\lim_{x\to\infty} 3/x = 0$, $\lim_{y\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$, dohromady

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1-\cos 3/x}{9/x^2} = 1/2.$$

Tedy vyšlo, že

$$\lim_{x\to\infty} x^2\ln(\cos 3/x) = -9/2.$$

Analogicky

$$\lim_{x\to\infty} x^2\ln(\cos 5/x) = -25/2.$$

Dohromady: $16/2$. Vraťme se k exponenciále: $\exp y$ je spojité v bodě 8, tedy z VOLSF máme

$$\lim_{x\to\infty}\exp x^2\ln\left(\frac{\cos\frac{3}{x}}{\cos\frac{5}{x}}\right) = e^8.$$

Z Heineho pak plyne, že i

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\cos\frac{3}{n}}{\cos\frac{5}{n}}\right)^{n^2} = e^8.$$

(f) Použijte k-krát l'Hospitala

$$\lim_{n\to\infty} \cos(n\pi)\frac{n^k}{e^{an}},$$

$k \in \mathbb{N}$, $a > 0$.

Řešení: Neboť $\cos(n\pi) = (-1)^n$, musíme limitu nejprve roztrhnout. Budeme počítat jen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{e^{an}}.$$

Převedeme na funkci. Pak použijeme l'Hospitala typu "něco/∞". Použijeme jej k-krát. Opakovaně nutno ověřit podmínky l'Hospitala (vychází pořád stejně).

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^k}{e^{ax}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{kx^{k-1}}{ae^{ax}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{k(k-1)x^{k-2}}{a^2e^{ax}} = \cdots \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{k(k-1)\cdots 2x}{a^{k-1}e^{ax}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{k!}{a^k e^{ax}} = \frac{k!}{a^k} \cdot 0 = 0.$$

Z Heineho pak i limita

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{e^{an}} = 0.$$

Po přidání kosinu získáme ze dvou policajtů výsledek

$$\lim_{n\to\infty} \cos(n\pi)\frac{n^k}{e^{an}} = 0.$$

2. (a)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \cos k$$

Řešení:

Platí, že

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{k})}{\frac{1}{k}} = \lim_{y\to 0+} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1.$$

Odtud vyplývá, že řada nemůže konvergovat absolutně podle limitního srovnávacího kritéria, srovnáním s řadou $\sum_k \frac{1}{k}$.

Je zřejmé, že řada $\sum_k \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\cos k$ konverguje podle Dirichletova kritéria, neboť $\ln(1+\frac{1}{k})$ konverguje monotónně k nule a řada $\sum_k \cos k$ má omezené částečné součty.

(b)

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \sin\frac{\pi}{\sqrt{k^2+1}+k}$$

Řešení:
Neabsolutní konvergence podle Leibnizova kritéria je zřejmá. Jak je to ale s tou absolutní? Platí, že

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{\sqrt{k^2+1}+k}}{\frac{1}{2k}}=\lim_{k\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{\sqrt{k^2+1}+k}}{\frac{\pi}{\sqrt{k^2+1}+k}}\cdot\frac{\frac{\pi}{\sqrt{k^2+1}+k}}{\frac{1}{2k}}=1.$$

Protože řada $\frac{1}{2k}$ diverguje, podle limitní verze srovnávacího kritéria musí divergovat také řada původní. Absolutní konvergence je tak vyloučena.

(c)

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{k}{k+1}\cos\frac{1}{k}$$

Řešení:
Řada diverguje, neboť nesplňuje nutnou podmínku konvergence. Je totiž

$$\lim_{k\to\infty}\frac{k}{k+1}\cos\frac{1}{k}=1.$$

(d)

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \text{arctg } k \text{arccotg } \sqrt{k}$$

Řešení:
Platí, že arctg $k\to\frac{\pi}{2}$ pro $k\to\infty$ a dále platí, že

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\text{arccotg }\sqrt{k}}{1/\sqrt{k}}=\lim_{y\to+\infty}\frac{\text{arccotg } y}{1/y}=\lim_{z\to0+}\frac{\text{arccotg }(\text{cotg } z)}{1/\text{cotg } z}=\lim_{z\to0+}\frac{z\cos z}{\sin z}=1.$$

Odtud vyplývá, že

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|a_k|}{1/\sqrt{k}}=\frac{\pi}{2}$$

a podle limitního srovnávacího kritéria nemůže být konvergence absolutní, neboť řada $\sum_k\frac{1}{\sqrt{k}}$ diverguje.

Protože posloupnost $\{\text{arctg } k\}$ je omezená a monotónní, podívejme se na řadu $\sum_k(-1)^k\text{arccotg }\sqrt{k}$. Pokud bude konvergentní, bude podle Abelova kritéria konvergentní také vyšetřovaná řada.

Ale řada $\sum_k(-1)^k\text{arccotg }\sqrt{k}$ je konvergentní podle Leibnizova kritéria, neboť arccotg $\sqrt{k}$ konverguje monotónně k nule.

Závěr: Řada je neabsolutně konvergentní, absolutně nikoliv.

(e)

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \sin\frac{1}{\sqrt{k^3}}\cos k$$

Řešení:

Platí, že

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{k^{3/2}}}{\frac{1}{k^{3/2}}}=1,$$

a tudíž řada (bez kosinu)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sin\frac{1}{\sqrt{k^3}}$$

konverguje (absolutně) pomocí limitního srovnávacího kritéria srovnáním s řadou $\sum_k \frac{1}{k^{3/2}}$. A protože

$$\left|(-1)^k\sin\frac{1}{\sqrt{k^3}}\cos k\right|\le \sin\frac{1}{k^{3/2}},$$

konverguje vyšetřovaná řada absolutně pomocí srovnávacího kritéria.

(f)

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\ln(1+k)}{\ln(1+k^3)}$$

Řešení:

Protože

$$\frac{\ln(1+k)}{\ln(1+k^3)}=\frac{\ln[k(1+1/k)]}{\ln[k^3(1+1/k^3)]}=\frac{\ln k+\ln(1+1/k)}{\ln k^3+\ln(1+1/k^3)}=\frac{\ln k+\ln(1+1/k)}{3\ln k+\ln(1+1/k^3)}\xrightarrow{k\to\infty}\frac{1}{3}\neq 0,$$

řada diverguje, neboť nesplňuje nutnou podmínku konvergence.