23. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Věta 1 (l'Hospitalovo pravidlo)**.** Nechť $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, f, g jsou reálné funkce a existuje $\lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Jestliže navíc platí

(a) $\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a+} g(x) = 0$, nebo

(b) $\lim_{x \to a+} |g(x)| = \infty$,

potom

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Příklady

1. Spočtěte následující limity

   (a)
   $$\lim_{x \to 0} \frac{\tan\ x - \sin x}{x - \sin x}$$

   (b)
   $$\lim_{x \to 0} \frac{\text{arcsin}\ 2x - 2\text{arcsin}\ x}{x^3}$$

   (c)
   $$\lim_{x \to 0+} x^x$$

   (d)
   $$\lim_{x \to 0+} (\text{cotg}\ x)^{\sin x}$$

   (e)
   $$\lim_{x \to 1-} \ln x \cdot \ln(1 - x)$$

   (f)
   $$\lim_{x \to \infty} \left(\text{tg}\ \frac{\pi x}{2x + 1} \right)^{\frac{1}{x}}$$

   (g) Nejprve upravte, pak LH
   $$\lim_{x \to 0} \frac{x\text{cotg}\ x - 1}{x^2}$$

   (h)
   $$\lim_{x \to 0} \text{cotg}\ x - \frac{1}{x}$$

(i)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{(1+x)^x}{e}\right)^{\frac{1}{x}}$$

(j)

$$\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x\sqrt{x}}\left(\sqrt{a}\arctan\sqrt{\frac{x}{a}}-\sqrt{b}\arctan\sqrt{\frac{x}{b}}\right),$$

$a, b > 0$