22. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Definice 1. Nechť f je reálná funkce a $a \in \mathbb{R}$. Jestliže existuje

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

pak tuto limitu nazýváme *derivací* funkce f v bodě a. Značíme

$$f'(a) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Věta 2 (Aritmetika derivací)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}$ a nechť f a g jsou funkce definované na nějakém okolí bodu a. Nechť existují $f'(a) \in \mathbb{R}^*$ a $g'(a) \in \mathbb{R}^*$.

(a) Platí

$$(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a),$$

(b) Je-li alespoň jedna z funkcí f, g spojitá v bodě a, pak

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a),$$

(c) Je-li funkce g spojitá v bodě a a navíc $g(a) \neq 0$, pak

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2},$$

vždy je-li výraz na pravé straně definován.

Věta 3 (O derivaci složené funkce)**.** Nechť f má derivaci v bodě $y_0 \in \mathbb{R}$, g má derivaci v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 = g(x_0)$ a g je v bodě x_0 spojitá. Potom

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(y_0)g'(x_0) = f'(g(x_0))\, g'(x_0),$$

je-li výraz na pravé straně definován.

Věta 4 (O derivaci inverzní funkce)**.** Nechť f je spojitá a ryze monotónní v intervalu I a nechť a je vnitřním bodem I. Označme $b := f(a)$. Potom

(a) je-li $f'(a) \in \mathbb{R}^* \setminus \{0\}$, pak $\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)}$;

(b) je-li $f'(a) = 0$ a f je rostoucí (respektive klesající), pak $\left(f^{-1}\right)'(b) = \infty$ (respektive $\left(f^{-1}\right)'(b) = -\infty$).

Věta 5. Nechť reálná funkce f je spojitá zprava v bodě $a \in \mathbb{R}$ a existuje $\lim_{x \to a_+} f'(x)$. Pak existuje $f'_+(a)$ a platí

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a_+} f'(x).$$

Levá strana analogicky.

Příklady

1. Vypočtěte derivace (i jednostranné) následujících funkcí

   (a) $f(x) = |x|$

   (b) $f(x) = x \cdot |x|$

   (c)
   $$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & x \in (-\infty, 1) \\ (1-x)(2-x), & [1, 2] \\ -(2-x), & (2, \infty) \end{cases}$$

   (d) $f(x) = |\sin^3 x|$

   (e) $f(x) = \arccos \frac{1}{|x|}$

   (f) $f(x) = [x] \sin^2(\pi x)$

   (g) $f(x) = \max\{\min\{\cos x, \frac{1}{2}\}, -\frac{1}{2}\}$

   (h)
   $$f(x) = \begin{cases} x, & x \in (-\infty, 0] \\ \ln(1+x), & [0, \infty) \end{cases}$$

   (i)
   $$f(x) = \begin{cases} \arctan x, & |x| \leq 1 \\ \frac{\pi}{4}\mathrm{sign} x + \frac{x-1}{2}, & |x| > 1 \end{cases}$$

   (j) $f(x) = \arcsin\ (\sin x)$

   (k) $f(x) = |\ln |x||$