21. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Definice 1. Nechť f je reálná funkce a $a \in \mathbb{R}$. Jestliže existuje

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

pak tuto limitu nazýváme *derivací* funkce f v bodě a. Značíme

$$f'(a) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Věta 2 (Aritmetika derivací)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}$ a nechť f a g jsou funkce definované na nějakém okolí bodu a. Nechť existují $f'(a) \in \mathbb{R}^*$ a $g'(a) \in \mathbb{R}^*$.

(a) Platí
$$(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a),$$

(b) Je-li alespoň jedna z funkcí f, g spojitá v bodě a, pak
$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a),$$

(c) Je-li funkce g spojitá v bodě a a navíc $g(a) \neq 0$, pak
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2},$$

vždy je-li výraz na pravé straně definován.

Věta 3 (O derivaci složené funkce)**.** Nechť f má derivaci v bodě $y_0 \in \mathbb{R}$, g má derivaci v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 = g(x_0)$ a g je v bodě x_0 spojitá. Potom

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(y_0)g'(x_0) = f'(g(x_0))\, g'(x_0),$$

je-li výraz na pravé straně definován.

Věta 4 (O derivaci inverzní funkce)**.** Nechť f je spojitá a ryze monotónní v intervalu I a nechť a je vnitřním bodem I. Označme $b := f(a)$. Potom

(a) je-li $f'(a) \in \mathbb{R}^* \setminus \{0\}$, pak $\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)}$;

(b) je-li $f'(a) = 0$ a f je rostoucí (respektive klesající), pak $\left(f^{-1}\right)'(b) = \infty$ (respektive $\left(f^{-1}\right)'(b) = -\infty$).

Příklady

1. (a)
$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{2n+a}-\sqrt[3]{2n+b})\sqrt[3]{(n+1)(3n+2)}$$
$a, b \in \mathbb{R},\ a, b > 0.$

   (b) Urči a, b, aby
$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3-x}-ax-b)=0$$

   (c)
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin(\pi(x-\frac{\pi}{4}))}{\cos 2x}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^k,$$
$k \in \mathbb{Z}.$

   (d)
$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n^\alpha+1)^3+\alpha(-1)^n}{(\sqrt{n^2+1}-n)n^2},$$
$\alpha > 0.$

   (e)
$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{\ln(n+1)}-\sqrt{\ln n})n^\alpha$$
$\alpha \in \mathbb{R}$

   (f)
$$\lim_{x\to 0+}\frac{\log(\sqrt{1+x^2}-x^\alpha)}{x^\alpha},$$
$\alpha \in \mathbb{R}.$

2. Spočtěte derivace následujících funkcí, určete definiční obory funkcí i jejich derivací

(a)
$$x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$$

(b)
$$\sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{\sqrt{x}}$$

(c)
$$\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

(d)
$$\frac{1}{4} \ln \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

(e)
$$e^x (x^2 - 2x + 2)$$

(f)
$$\frac{x^p (1 - x)^q}{1 + x}$$

(g)
$$x^x$$

(h)
$$\ln(\ln^2(\ln^3 x))$$

(i)
$$\sin(\sin(\sin x))$$

(j)
$$\frac{\sin^2 x}{\sin x^2}$$

(k)
$$2^{\tan \frac{1}{x}}$$

(l)
$$\arcsin\ (\sin x)$$

(m)
$$\frac{1}{\sqrt{2}} \mathrm{arccotg}\ \frac{\sqrt{2}}{x}$$

(n)
$$x(\arcsin\ x)^2 + 2\sqrt{1 - x^2} \arcsin\ x - 2x$$

(o)
$$\frac{\cosh\ x}{\sinh\ ^2 x} - \ln\left(\mathrm{ctgh} \frac{x}{2}\right)$$