20. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Příklady

1. (a)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\arctan n}{\sqrt{2n^2+1}}\right)^{\frac{n}{3}}$$

Řešení: Budeme počítat limitu funkce

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{\arctan x}{\sqrt{2x^2+1}}\right)^{\frac{x}{3}}=\lim_{x\to\infty}\exp\left[\frac{x}{3}\frac{\ln\left(1-\frac{\arctan x}{\sqrt{2x^2+1}}\right)}{1-\frac{\arctan x}{\sqrt{2x^2+1}}-1}\cdot\frac{-\arctan x}{\sqrt{2x^2+1}}\right]$$

Nejprve spočteme limitu

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{3}\left(-\frac{\arctan x}{\sqrt{2x^2+1}}\right)\overset{VOAL}{=}\lim_{x\to\infty}-\arctan x\lim_{x\to\infty}\frac{x}{3x\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}=\frac{-\pi}{2}\frac{1}{3\sqrt{2}}.$$

Dále obvyklou substitucí:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1-\frac{\arctan x}{\sqrt{2x^2+1}}\right)}{1-\frac{\arctan x}{\sqrt{2x^2+1}}-1}=1,$$

neb
$g(x)=1-\frac{\arctan x}{\sqrt{2x^2+1}}\to 1$ a $f(y)=\frac{\ln y}{y-1}\to 1$ pro $y\to 1$.
Dohromady, neb e^x je spojitá funkce, získáme

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{\arctan x}{\sqrt{2x^2+1}}\right)^{\frac{x}{3}}=e^{-\frac{\pi}{6\sqrt{2}}}.$$

a z Heineho

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\arctan n}{\sqrt{2n^2+1}}\right)^{\frac{n}{3}}=e^{-\frac{\pi}{6\sqrt{2}}}.$$

(b)

$$\lim_{x\to 0+}\left(1-\sqrt{\arcsin x}\right)^{\frac{1}{\sqrt[4]{1-\cos x}}}$$

Řešení:

Jedná se o limitu typu 1^∞, tedy limitu převedeme na problém:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{\sqrt[4]{1-\cos x}} - \sqrt{\arcsin x} = \lim_{x\to 0+} -\sqrt{\frac{\arcsin x}{x}} \cdot \sqrt[4]{\frac{x^2}{1-\cos x}} = -\sqrt{1}\sqrt[4]{2}$$

Použili jsme složenou funkci, spojitost e^x, odmocniny, VOAL,
Sami dopočítejte logaritmus a seskládejte dohromady.
Výsledkem je $e^{-\sqrt[4]{2}}$

(c)

$$\lim_{x\to 0+} (\sin x + \arcsin x)^{\frac{1}{\ln x}}$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 0+} (\sin x + \arcsin x)^{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x\to 0+} \exp\left[\frac{1}{\ln x} \ln(\sin x + \arcsin x)\right]$$

Exponenciela je spojitá vnější funkce, stačí tedy spočítat

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{\ln x} \ln(\sin x + \arcsin x) = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x \left(\frac{\sin x}{x} + \frac{\arcsin}{x}\right)}{\ln x}$$
$$= \frac{\ln x}{\ln x} + \frac{\ln\left(\frac{\sin x}{x} + \frac{\arcsin x}{x}\right)}{\ln x} \overset{VOAL}{=} 1 + \frac{\ln 2}{-\infty} = 1$$

Užili jsme faktu, že logaritmus je spojitý v 1, známe limity pro sin a arcsin a větu o limitě složené funkce.
Celkový výsledek je tedy

$$e^1.$$

(d)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^3 - \arctan x)}{\ln(x^2 + \arctan x)}$$

Řešení:
Vytkneme dominantní člen

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^3 - \arctan x)}{\ln(x^2 + \arctan x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x^3 \left(1 - \frac{\arctan x}{x^3}\right)}{\ln x^2 \left(1 + \frac{\arctan x}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{3\ln x + \ln\left(1 - \frac{\arctan x}{x^3}\right)}{2\ln x + \ln\left(1 + \frac{\arctan x}{x^2}\right)}$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3 + \frac{\ln\left(1 - \frac{\arctan x}{x^3}\right)}{\ln x}}{2 + \frac{\ln\left(1 + \frac{\arctan x}{x^2}\right)}{\ln x}} \overset{VOAL}{=} \frac{3+0}{2+0}$$

Použili jsme limity

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\arctan x}{x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\arctan x}{x^2} = 0,$$

neb $\arctan x$ je omezená a $1/x$ mizející funkce.

Dále jsme použili spojitosti logaritmu (v 1) a opět součin omezené a mizející.

(e)

$$\lim_{x\to\infty} x\operatorname{arccotg} x = 1$$

Řešení: na webu

(f)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{\ln(n^2+4)-\ln n^2}}{\operatorname{arccotg} n}$$

Řešení: na webu

(g)

$$\lim_{x\to 1-} \frac{\sqrt{e^2-e^{2x}}}{\arccos x}$$

Řešení: na webu

(h)

$$\lim_{x\to 0+} \left(\frac{(\arctan x)^{2/x}+x^{1/x}}{2}\right)^x$$

Řešení:

Prve vyřešíme limitu

$$\lim_{x\to 0+} \left(\frac{\arctan x}{2}\right)^{2/x} = \lim_{x\to 0+} \exp\left(\frac{2}{x}\ln\frac{\arctan}{2}\right)$$

Pro to potřebujeme

$$\lim_{x\to 0+} \frac{2}{x}\ln\frac{\arctan}{2} = \infty\cdot(-\infty) = -\infty$$

Tedy dle věty o limitě složené funkce (P1)

$$\lim_{x\to 0+} \left(\frac{\arctan x}{2}\right)^{2/x} = 0$$

Nyní zpět k původní limitě, počítejme

$$\lim_{x\to 0+} x\ln\left(\frac{(\arctan x)^{2/x}+2^{2/x}}{2}\right) = \lim_{x\to 0+} x\ln(2^{2/x}) + x\ln\left(\frac{1}{2}+\frac{\left(\frac{\arctan x}{2}\right)^{2/x}}{2}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0+} x\frac{2}{x}\ln 2 + x\ln\left(\frac{1}{2}+\frac{\left(\frac{\arctan x}{2}\right)^{2/x}}{2}\right) \overset{VOAL}{=} 2\ln 2 + 0\cdot\ln\left(\frac{1}{2}+0\right)$$

Celkem tedy máme

$$\lim_{x\to 0+} \left(\frac{(\arctan x)^{2/x}+x^{1/x}}{2}\right)^x = e^{\ln 4} = 4.$$

(i)
$$\lim_{n\to\infty} n^{5/2}\arcsin\left(\sqrt{n^5+1}-\sqrt{n^5-1}\right)$$

Řešení: na webu