19. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Příklady

1. (a)

   (b)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{(1-\sqrt{x})(1-x)}$$

Řešení: $\frac{1}{2}$, limita se určí dosazením.

(c)

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{(1-\sqrt{x})/(1-x)}$$

Řešení:
Použijeme jednoduché úpravy na exponent a dostaneme

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{(1-\sqrt{x})/(1-x)}=\lim_{x\to 1}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{(1-x)/[(1-x)(1+\sqrt{x})]}=$$

a nyní zkrácením a dosazením dostaneme

$$=\frac{2}{3}^{1/2}=\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

(d)

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{(1-\sqrt{x})(1-x)}$$

Řešení:
Použijeme klasický trik převedení do exponentu za použití vzorce $y=e^{\ln y}$.

$$=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{(1-\sqrt{x})/(1-x)}=\lim_{x\to +\infty}\exp\left[\ln\left(\frac{1+x}{2+x}\right)\cdot\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right]=$$

Symbolem $\exp[y]$ míníme totéž co e^y. Podle věty o limitě složené funkce (varianta (S)) lze přehodit pořadí exp a lim — to je velmi užitečná vlastnost (spojité) exponenciální funkce.

$$=\exp\left[\lim_{x\to +\infty}\ln\frac{1+x}{2+x}\cdot\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right]$$

Limitu v závorce je jednoduché spočítat vytknutím x v čitateli a jmenovateli obou zlomků a vyjde, že

$$= \exp\left[\ln 1 \cdot 0\right] = \exp[0] = e^0 = 1.$$

(e)

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2}$$

Řešení:
Upravujeme.

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2} = \lim_{x\to\infty} \exp\left[\ln\left(\frac{x+2}{2x-1}\right)\cdot x^2\right] =$$

Podle věty o limitě složené funkce lze přehodit pořadí lim a exp.

$$= \exp\left[\lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{x+2}{2x-1}\right)\cdot x^2\right] =$$

Nyní zlomek konverguje k jedné polovině a logaritmus jedné poloviny je záporné číslo. Proto se od jistého velkého x se bude logaritmus lišit od $\ln\frac{1}{2}$ jen o velmi málo, zatímco x^2 poroste nade všechny meze.

$$= \exp\left[\ln\frac{1}{2}\cdot +\infty\right] = e^{-\infty} = 0.$$

(f)

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^3}{1-x}}$$

Řešení:
Upravujeme.

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^3}{1-x}} = \lim_{x\to\infty} \exp\left[\ln\left(\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)\cdot\frac{x^3}{1-x}\right] =$$

$$= \exp\left[\lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)\cdot\frac{x^3}{1-x}\right] = \exp\left[\ln\frac{3}{2}\cdot -\infty\right] = e^{-\infty} = 0.$$

(g)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}+} \left[\operatorname{tg}\,\left(\frac{\pi}{8}+x\right)\right]^{\operatorname{tg}\,2x}$$

Řešení:

Uvědomme si, že zkoumáme jednostrannou limitu. Proto jde exponent do $-\infty$ (to plyne z vlastností funkce tangens). Pokud si zároveň uvědomíme, že $\operatorname{tg}\frac{3}{8}\pi \geq \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$ a že logaritmus čísla většího než jedna je kladný, je skoro vše hotovo.

$$\lim_{x\searrow\frac{\pi}{4}}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}+x\right)\right]^{\operatorname{tg}2x} = \exp\left\{\lim_{x\searrow\frac{\pi}{4}}\ln\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}+x\right)\right]\cdot\operatorname{tg}2x\right\} = \exp\left\{\ln\left(\operatorname{tg}\frac{3}{8}\pi\right)\cdot-\infty\right\} = e^{-}$$

(h)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$$

Řešení:

Stále stejně.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}} = \lim_{x\to\infty}\exp\left[\ln\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)\cdot\frac{x-1}{x+1}\right] =$$

$$= \exp\left[\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)\cdot\frac{x-1}{x+1}\right] = \exp\left[\ln 1\cdot 1\right] = e^0 = 1.$$

(i)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2x-1}{2x^2-3x-2}\right)^{1/x}$$

Řešení:

Klasický trik s exponencielou dává

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-1}{2x^2-3x-2}\right)^{1/x} = \exp\left[\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x^2+2x-1}{2x^2-3x-2}\right)\cdot\frac{1}{x}\right] = \exp\left[\ln\frac{1}{2}\cdot 0\right] = e^0 = 1.$$

(j)

$$\lim_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$$

Řešení:

V té vhodně rozšíříme.

$$= \lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{x^2}{\sin^2 x}\cdot\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\left[(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}}\right]^{\frac{x^2}{\sin^2 x}} =$$

Nyní použijeme triku exponenciály.

$$= \exp\left[\lim_{x\to 0}\left(\ln(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{x^2}{\sin^2 x}\right)\right] =$$

Protože logaritmus je spojitá funkce, je

$$= \exp\left[\ln\left(\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}}\right)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin^2 x}\right] =$$

První limitu nyní spočteme substitucí $y=\frac{1}{x^2}$, druhou známe.

$$= \exp\left[\ln\left(\lim_{y\to+\infty}(1+\frac{1}{y})^y\right)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin^2 x}\right] = \exp\left[\ln e\cdot 1^2\right] = \exp[1] = e^1 = e.$$

(k)

$$\lim_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\mathrm{cotg}\ ^2 x}$$

Řešení: Samotný exponenciální trik příliš nepomůže. Počítejme zhruba podle našeho odvozeného schématu (některé kroky si ušetříme).

$$\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\mathrm{cotg}\ ^2 x} = \lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0}(1+x^2)^{-1}\cdot\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{\sin^2 x}} =$$

První limitu spočteme snadno dosazením, vyjde $(1+0)^{-1}=1^{-1}=1$. Zbyde tedy pouze druhá limita. V té vhodně rozšíříme.

$$= \lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{x^2}{\sin^2 x}\cdot\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\left[(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}}\right]^{\frac{x^2}{\sin^2 x}} =$$

Nyní použijeme triku exponenciály.

$$= \exp\left[\lim_{x\to 0}\left(\ln(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{x^2}{\sin^2 x}\right)\right] =$$

Protože logaritmus je spojitá funkce, je

$$= \exp\left[\ln\left(\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}}\right)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin^2 x}\right] =$$

První limitu nyní spočteme substitucí $y=\frac{1}{x^2}$, druhou známe.

$$= \exp\left[\ln\left(\lim_{y\to+\infty}(1+\frac{1}{y})^y\right)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin^2 x}\right] = \exp\left[\ln e\cdot 1^2\right] = \exp[1] = e^1 = e.$$

(l)

$$\lim_{x\to 0}(1+\mathrm{tg}\ x)^{\frac{1}{\sin x}} =$$

Řešení:

řešíme pomocí chytrého rozšíření exponentu a exponenciálního triku: využíváme též větu o limitě součinu a spojitost logaritmu (tj. možnost přehození limity a logaritmu).

$$= \lim_{x\to 0}\left[(1+\text{tg }x)^{\frac{1}{\text{tg }x}}\right]^{\frac{\text{tg }x}{\sin x}} = \exp\left[\ln \lim_{x\to 0}\left(1+\text{tg }x)^{\frac{1}{\text{tg }x}}\right) \cdot \lim_{x\to 0}\frac{\text{tg }x}{\sin x}\right] =$$

Nyní první limita je po substituci $y = \text{tg }x$ rovna e a druhá je zřejmě rovna jedné, jak plyne z faktu $\frac{\text{tg }x}{\sin x} = \frac{1}{\cos x}$.

$$= \exp\left[\ln e\right] = e^1 = e.$$

Pokud dáme oba výsledky dohromady a využijeme větu o limitě podílu, plyne odtud

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\text{tg }x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}} = \frac{e}{e} = 1.$$

(m)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\text{tg }x}{1+\sin x}\right)^{1/\sin x}$$

Řešení:

Je zřejmé pomocí substituce $y = \sin x$, že

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}} = e.$$

(Úplně lze důkaz provést počítáním jednostranných limit a substitucí $z = \frac{1}{y}$.) Problematická je tedy pouze limita

$$\lim_{x\to 0}(1+\text{tg }x)^{\frac{1}{\sin x}} =$$

Tu řešíme pomocí chytrého rozšíření exponentu a exponenciálního triku: využíváme též větu o limitě součinu a spojitost logaritmu (tj. možnost přehození limity a logaritmu).

$$= \lim_{x\to 0}\left[(1+\text{tg }x)^{\frac{1}{\text{tg }x}}\right]^{\frac{\text{tg }x}{\sin x}} = \exp\left[\ln \lim_{x\to 0}\left(1+\text{tg }x)^{\frac{1}{\text{tg }x}}\right) \cdot \lim_{x\to 0}\frac{\text{tg }x}{\sin x}\right] =$$

Nyní první limita je po substituci $y = \text{tg }x$ rovna e a druhá je zřejmě rovna jedné, jak plyne z faktu $\frac{\text{tg }x}{\sin x} = \frac{1}{\cos x}$.

$$= \exp\left[\ln e\right] = e^1 = e.$$

Pokud dáme oba výsledky dohromady a využijeme větu o limitě podílu, plyne odtud

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\text{tg }x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}} = \frac{e}{e} = 1.$$

(n)

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{1/(x-a)}$$

Řešení:
Obdobnou metodou jako v minulém příkladě.

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}} = \lim_{x\to a}\left(\frac{\sin a+\sin x-\sin a}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}} =$$

$$= \lim_{x\to a}\left(1+\frac{\sin x-\sin a}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}} = \lim_{x\to a}\left[\left(1+\frac{\sin x-\sin a}{\sin a}\right)^{\frac{\sin a}{\sin x-\sin a}}\right]^{\frac{1}{x-a}\cdot\frac{\sin x-\sin a}{\sin a}} =$$

$$= \exp\left[\ln\left(\lim_{x\to a}\left(1+\frac{\sin x-\sin a}{\sin a}\right)^{\frac{\sin a}{\sin x-\sin a}}\right)\cdot\lim_{x\to a}\left(\frac{\sin x-\sin a}{x-a}\cdot\frac{1}{\sin a}\right)\right] =$$

Substituce $y=\frac{\sin x-\sin a}{\sin a}$ na první limitu. Pro druhou využijte příklad VI.13. (Jde vlastně o derivaci funkce sinus.

$$= \exp\left[\ln\left(\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}\right)\cdot\lim_{x\to a}\left(\frac{\sin x-\sin a}{x-a}\right)\cdot\frac{1}{\sin a}\right] =$$

$$= \exp\left[\ln(e)\cdot\cos a\cdot\frac{1}{\sin a}\right] = e^{\frac{\cos a}{\sin a}} = e^{\text{cotg }a}.$$

(o)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\text{tg }x}$$

Řešení:
Obdobnou metodou jako v příkladu XXII.C.4. Rozšíření je v tomto případě velmi nenápadné.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\text{tg }x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+(\sin x-1))^{\text{tg }x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[(1+(\sin x-1))^{\frac{1}{\sin x-1}}\right]^{(\sin x-1)\text{tg }x} =$$

Přechod pomocí exponenciálního triku k následující rovnosti by pro vás měla být již rutinní záležitost.

$$= \exp\left[\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x-1)\text{tg }x\right] = \exp\left[\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-1}{\cos x}\right] =$$

Nyní je možné použít pro lepší vhled třeba substituci $y=x-\pi/2$, přičemž se snadno ukáže ze součtových vzorců, že $\sin(y+\pi/2)=\cos y$ a $\cos(y+\pi/2)=-\sin y$.

$$= \exp\left[\lim_{y\to 0}\frac{\cos y-1}{-\sin y}\right] = \exp\left[\lim_{y\to 0}\frac{\frac{1-\cos y}{y^2}}{\frac{\sin y}{y}}\cdot y\right] = \exp\left[\frac{\frac{1}{2}}{1}\cdot 0\right] = e^0 = 1.$$

2. (a)