

18. cvičení

<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/>
kytaristka@gmail.com

Teorie

$\alpha > 0, \beta > 0, a > 1:$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^\alpha x}{x^\beta} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\beta}{a^x} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

$$a^b = e^{b \ln a}$$

$$\ln a + \ln b = \ln(ab)$$

$$\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$$

Příklady

1. (a) Užijte vzorce pro logaritmus

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x [\ln(x+1) - \ln x]$$

- (b) Užijte substituci $y = x - a$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a},$$

kde $a > 0$

- (c) Užijte $a^x = e^{x \ln a}$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x},$$

kde $a > 0$.

- (d) Vytkněte nejrychleji rostoucí člen z logaritmu

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 - x + 1)}{\ln(x^{10} + x + 1)}$$

- (e) Zbavme se odmocniny

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \sin x} - 1}{e^{x^2} - 1}$$

- (f) Vytkněte nejrychleji rostoucí člen

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2 + e^{3x})}{\ln(3 + e^{2x})}$$

- (g) Převed'te na základní limitu

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1 + 3^x)}{\ln(1 + 2^x)}$$

- (h) Vytkněte...

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x})}{\ln(1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x})}$$

- (i)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln \frac{nx + \sqrt{1 - n^2 x^2}}{x + \sqrt{1 - x^2}}$$

- (j) Vytkneme dominantní člen

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + 3^x)}{\ln(1 + 2^x)}$$

(k) Převodeme na základní limity

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \sin x} - 1}{e^{x^2} - 1}$$

(l) Půjčte si a^a , roztrhněte, vytkněte a^a a a^{a-1} .

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x - a},$$

kde $a > 0$

(m) Půjčte si x^a a postupujte obdobně

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^x - a^a}{x - a},$$

kde $a > 0$

2. Řešte převodem na základní limitu Eulerova čísla

(a)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x + 1}{\ln x} \right)^{\ln x}$$

(d)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x + a}{x - a} \right)^x$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{c}{x} \right)^x$$

(e) Spočtěte jednostranné limity a použijte substituci $y = 1/x$.

(c)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 2} \right)^{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[x]{1 - 2x}$$