15. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p+1}{n^q+n^2-3}$$

Řešení:

Pokud $p<0$, potom $n^p \leq 1$ a řada konverguje pro všechny hodnoty $q \in \mathbb{R}$ podle srovnání

$$\frac{n^p+1}{n^q+n^2-3} \leq \frac{2}{n^2-3}.$$

Pokud $0<p<1$, pak řada opět konverguje pro všechna $q \in \mathbb{R}$, neboť $2-p>1$ a

$$\frac{n^p+1}{n^q+n^2-3} = \frac{1+1/n^p}{n^{q-p}+n^{2-p}-3n^{-p}} \leq \frac{2}{n^{2-p}-3}.$$

Pokud $p \geq 1$, potom řada konverguje tehdy a jen tehdy, je-li $q-p>1$. Je-li tato podmínka splněna, plyne konvergence řady ze srovnání

$$\frac{n^p+1}{n^q+n^2-3} = \frac{1+1/n^p}{n^{q-p}+n^{2-p}-3n^{-p}} \leq \frac{2}{n^{q-p}-3}.$$

Není-li podmínka splněna, tj. je-li $p \geq 1$ a zároveň $q-p \leq 1$, pak divergence řady plyne ze srovnání

$$\frac{n^p+1}{n^q+n^2-3} = \frac{1+1/n^p}{n^{q-p}+n^{2-p}-3n^{-p}} \geq \frac{1}{n^{q-p}+n^{2-p}-3n^{-p}} = \frac{1}{n}\frac{1}{n^{q-p-1}+n^{1-p}(1-3/n^2)} \geq \frac{1}{n}$$

od jistého vhodného n počínaje, neboť ve druhém zlomku jsou ve jmenovateli nekladné mocniny.

2.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{k^2+7}-\sqrt[3]{k^2+3}}{\sqrt[4]{k}}$$

Řešení:

Nejprve vhodně rozšíříme, pak upravíme a nakonec odhadneme.

$$\frac{\sqrt[3]{k^2+7}-\sqrt[3]{k^2+3}}{\sqrt[4]{k}} = \frac{(k^2+7)-(k^2+3)}{\sqrt[4]{k}} \frac{1}{\sqrt[3]{(k^2+7)^2}+\sqrt[3]{k^2+7}\sqrt[3]{k^2+3}+\sqrt[3]{(k^2+3)^2}} =$$

$$= \frac{4}{k^{1/4+4/3}} \frac{1}{\sqrt[3]{(1+7/k^2)^2}+\sqrt[3]{1+7/k^2}\sqrt[3]{1+3/k^2}+\sqrt[3]{(1+3/k^2)^2}} \leq \frac{4}{k^{4/3}}.$$

Konvergence podle srovnávacího kritéria je nyní zřejmá.

3.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1+x^{2k}}$$

Řešení:

Pokud $x = 0$, řada konverguje absolutně (triviální). Odhad (zapomenutí členu x^{2k} ve jmenovateli)

$$\left| \frac{x^k}{1+x^{2k}} \right| \leq |x|^k$$

dává, že pro $|x| < 1$ řada konverguje absolutně srovnáním s geometrickou řadou.

Pokud $x = \pm 1$, řada konvergovat nemůže, neboť $a_k = \frac{(\pm 1)^k}{1+(\pm 1)^{2k}} = \frac{(\pm 1)^k}{2} \not\to 0$.

Nechť nyní $|x| > 1$. Potom odhad (zapomenutí jedničky ve jmenovateli)

$$\left| \frac{x^k}{1+x^{2k}} \right| \leq \left| \frac{x^k}{x^{2k}} \right| = \frac{1}{|x|^k}$$

dává, že řada konverguje absolutně srovnáním s geometrickou řadou.

[Pro $x \neq \pm 1$ konverguje absolutně, pro $x = \pm 1$ nekonverguje.]

4.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k^2}}{2^k}$$

Řešení:

Pro $x = 0$ je konvergence jasná. Nechť nyní $x > 0$. Platí, že

$$\frac{x^{k^2}}{2^k} = \frac{2^{\log_2 x \cdot k^2}}{2^k} = 2^{k^2 \log_2 x - k} = 2^{k^2 (\log_2 x - 1/k)},$$

z čehož plyne, že pro $x \leq 1$ je člen $\log_2 x - 1/k$ záporné číslo a řada tudíž konverguje (absolutně). Pro $x > 1$ je ale od jistého k počínaje kladná a dokonce je

$$2^{k^2(\log_2 x - 1/k)} \xrightarrow{k \to \infty} +\infty \neq 0.$$

Pro $x > 1$ tedy řada nekonverguje.

Pokud $x < 0$, pak substituujme $y = -x$. Užitím faktu, že $(-1)^{k^2} = (-1)^k$, tak dostaneme řadu $\sum (-1)^k \frac{y^{k^2}}{2^k}$. Podle předchozí diskuze je jasné, že pro $y \leq 1$ konverguje absolutně a pro $y > 1$ konvergovat nemůže.

Závěr: řada konverguje absolutně pro $x \in [-1, 1]$, pro ostatní x nekonverguje.

5.
$$\sum_{k=1}^{\infty} k^4 x^k$$

Řešení:

Pro $|x| < 1$ konverguje absolutně podle podílového kritéria, neboť

$$\lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^4 \cdot |x|^{k+1}}{k^4 \cdot |x|^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^4}{k^4} \cdot |x| = |x| < 1.$$

Pokud $|x| \geq 1$, nekonverguje, neboť $\lim k^4|x|^k = +\infty$, a proto není možné, aby $\lim k^4 x^k = 0$.

6.
$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$$

Řešení:

Pro $|x| < 1$ konverguje absolutně podle odhadu

$$\left|(-1)^k \frac{x^k}{k}\right| \leq |x|^k.$$

Pro $x = 1$ konverguje neabsolutně podle Leibnizova kritéria, protože $\frac{1}{k} \searrow 0$. Absolutně nekonverguje, neboť řada $\frac{1}{k}$ není konvergentní.

Pro $x = -1$ řada nekonverguje, neboť $(-1)^{k+1}\frac{(-1)^k}{k} = \frac{(-1)^{2k+1}}{k} = -\frac{1}{k}$.

Pokud $|x| > 1$, řada nekonverguje, neboť $\lim |a_k| = +\infty$.

7.
$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

Řešení:

Pro $|x| < 1$ je řada konvergentní absolutně podle srovnávacího kritéria a odhadu

$$\left|(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right| \leq |x|^{2k+1}.$$

Pro $x = 1$ je řada konvergentní neabsolutně podle Leibnizova kritéria, neboť $\frac{1}{2k+1} \searrow 0$.

Pro $x = -1$ je $(-1)^k(-1)^{2k+1}\frac{1}{2k+1} = \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}$ a řada konverguje neabsolutně podle Leibnizova kritéria.

Pro $|x| > 1$ řada nekonverguje, neboť $\lim |a_k| = +\infty$.

8.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \cos(k^2\pi)\left(\sqrt{k+9}-\sqrt{k}\right)$$

Řešení:

Platí, že k^2 je liché, právě když k je liché. Proto

$$\cos(k^2\pi) = \cos(k\pi) = (-1)^k.$$

Dále je

$$\sqrt{k+9}-\sqrt{k} = \frac{9}{\sqrt{k+9}+\sqrt{k}} \geq \frac{9}{\sqrt{k}}.$$

Z těchto výpočtů je zřejmé, že řada absolutně konvergovat nemůže (řada $\frac{9}{\sqrt{k}}$ není konvergentní), ale konverguje neabsolutně podle Leibnizova kritéria.

9.
$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+(-1)^k}$$

Řešení:

Absolutní konvergence je vyloučena odhadem $\frac{1}{2k+(-1)^k} \geq \frac{1}{2k-1}$. Ukážeme, že řada konverguje neabsolutně.

Leibnizovo kritérium lze použít přímo, protože nerovnosti

$$2k+1 \leq 2(k+1)-1, \quad 2k-1 \leq 2(k+1)+1 \implies \frac{1}{2k+(-1)^k} \geq \frac{1}{2(k+1)+(-1)^{k+1}}$$

jsou pravdivé.

10.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^\alpha}{(2n)!}$$

Řešení: Použijeme d'Alambertovo kritérim:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{((n+1)!)^\alpha}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^\alpha} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \cdot (n+1)^{\alpha-2},$$

což pro $\alpha = 2$ vyjde $1/4$, pro $\alpha < 2$ je to 0 a pro $\alpha > 2$ vyjde ∞. Tedy řada konverguje absolutně pro $\alpha \leq 2$ a diverguje pro $\alpha > 2$.