14. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/∼kuncova/
kytaristka@gmail.com

1. (a)
$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{k}{k+1}\cos 2k\pi$$

Řešení: Řada diverguje, neb nesplňuje nutnou podmínku konvergence:
$$\lim(-1)^k \frac{k}{k+1}\cos k\pi = (-1)^k \frac{k}{k+1}(-1)^k = 1.$$

(b)
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}\frac{k^2}{k^2+1}$$

Řešení: Podle Leibnizova kritéria konverguje řada $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}$. Následně podle Abela konverguje také $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\frac{k^2}{k^2+1}$, neboť posloupnost $\frac{k^2}{k^2+1}$ je monotónní.

(c) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{2k+10}{3k+1}\right)^k$

Řešení: Řada konverguje absolutně podle odmocninového kritéria, neboť
$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k\to\infty}\frac{2k+10}{3k+1} = \frac{2}{3} < 1.$$

(d)
$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{k\sin k}{k^2+1}$$

Řešení: Označme a_k obecný k-tý člen řady. Nejprve vyloučíme absolutní konvergenci porovnáním s řadou $\sum_k |\sin k|/k$. To je divergentní řada podle faktu uvedeného na začátku oddílu o konvergenci obecných řad. Přitom
$$\lim_{k\to\infty}\frac{|a_k|}{|\sin k|/k} = \lim_{k\to\infty}\frac{\frac{k}{k^2+1}}{\frac{1}{k}} = 1.$$

Tudíž vyšetřovaná řada nemůže konvergovat absolutně.
Upravíme nyní člen řady na tvar
$$(-1)^k\frac{k\sin k}{k^2+1} = (-1)^k\frac{\sin k}{k}\cdot\frac{k^2}{k^2+1}.$$

Dokážeme-li nyní konvergenci řady $\sum_k (-1)^k \frac{\sin k}{k}$, pak, vzhledem k tomu, že posloupnost $\{\frac{k^2}{k^2+1}\}$ je evidentně omezená (má limitu) a monotónní, z Abelova kritéria bude vyplývat také neabsolutní konvergence vyšetřované řady.

Nyní použijeme **triku** rozdělení řady na dvě, na řadu sudých a lichých členů.

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{\sin k}{k} \stackrel{?}{=} \sum_{k=1,3,5,\dots}(-1)^k \frac{\sin k}{k} + \sum_{k=2,4,6,\dots}(-1)^k \frac{\sin k}{k}$$

což po úpravě dává

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{\sin k}{k} \stackrel{?}{=} \sum_{k=1,3,5,\dots} -\frac{\sin k}{k} + \sum_{k=2,4,6,\dots} \frac{\sin k}{k}$$

Z následující poznámky plyne, že pokud dokážeme konvergenci řad na pravé straně, pak konverguje také řada na straně levé a rovnost s otazníkem platí.

Avšak konvergence obou řad na pravé straně plyne z Dirichletova kritéria. Protože $\frac{1}{k} \to 0$ monotónně, stačí ověřit stejnou omezenost částečných součtů řad $\sum_k \sin k$ sčítaných přes sudé a liché členy.

Řada $\sum_k \sin kx$ má totiž omezené částečné součty pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Položením $x = 2$ tedy zjišťujeme, že řada $\sum_k \sin(2k) = \sum_{k=2,4,\dots} \sin k$ má omezené částečné součty. A protože

$$\left|\sum_{k=1,3,5,\dots}^{N} \sin k\right| = \left|\sum_{k=1}^{N} \sin k - \sum_{k=2,4,6,\dots}^{N} \sin k\right| \le \left|\sum_{k=1}^{N} \sin k\right| + \left|\sum_{k=2,4,6,\dots}^{N} \sin k\right|$$

a obě řady napravo mají stejně omezené částečné součty, plyne odtud stejná omezenost částečných součtů i pro řadu lichých členů.

Tím je neabsolutní konvergence vyšetřované řady dokázána.

(e) Užijte faktu $2\sin^2 = 1 - \cos 2k$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin^2 k}{k}$$

Řešení: Pomocí faktu výše píšeme

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin^2 k}{k} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos 2k}{k}.$$

První řada diverguje, druhá konverguje z Dirichleta (a faktů). Tedy součet vpravo je dobře definován a řada diverguje.

(f)

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{k\sin^2 k}{k^2+1}$$

Řešení: Ukážeme, že řada nekonverguje absolutně. K tomu stačí dokázat divergenci řady $\sum_k \frac{\sin^2 k}{k}$ a použít limitní srovnávací kritérium. Nyní platí, že $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ a tudíž

$$\sum_k \frac{\sin^2 k}{k} = \sum_k \frac{1-\cos 2k}{k} = \sum_k \frac{1}{k} - \sum \frac{\cos 2k}{k},$$

přičemž poslední řada napravo $\sum_k \frac{\cos 2k}{k}$ konverguje podle Dirichletova kritéria, neboť $\frac{1}{k} \to 0$ monotónně a $\sum_k \cos kx$ má omezené částečné součty pro každé $x \in \mathbb{R}$, tedy speciálně také pro $x = 2$. Tudíž součet řady $\sum_k \frac{\cos 2k}{k} = S$ je reálné číslo, a protože harmonická řada diverguje do $+\infty$, platí

$$\sum_k \frac{\sin^2 k}{k} = \sum_k \frac{1-\cos 2k}{k} = \sum_k \frac{1}{k} - \sum \frac{\cos 2k}{k} = +\infty - S = +\infty.$$

Ukážeme, že řada konverguje neabsolutně. Za tímto účelem řadu roztrhněme na dvě:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{k\sin^2 k}{k^2+1} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{k(1-\cos 2k)/2}{k^2+1} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{2}\frac{k}{k^2+1} - \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{k\cos 2k}{k^2+1}.$$

První z řad napravo konverguje podle Leibnizova kritéria. Pro druhou lze použít analogický postup jako v minulém příkladě.

(g)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos 2k}{\ln k}$$

Řešení:

Absolutně řada nekonverguje neb

$$\frac{|\cos 2k|}{\ln k} \geq \frac{|\cos 2k|}{n},$$

kterážto diverguje (fakta o goniometrickýh řadách).

Neabsolutně řada konverguje z Dirichleta, neb $\cos 2k$ má omezené částečné součty a $1/\ln k \to 0$.

(h)

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{\cos^2 k}{\ln k}$$

Řešení:
Řada nekonverguje absolutně, neboť

$$\sum_k \frac{\cos^2 k}{\ln k} = \sum_k \frac{1+\cos 2k}{2\ln k} = \underbrace{\sum_k \frac{1}{2\ln k}}_{=+\infty} + \underbrace{\sum_k \frac{\cos 2k}{2\ln k}}_{\text{konverg. řada}} = +\infty,$$

neboť druhá z řad je konvergentní podle Dirichletova kritéria díky omezenosti částečných součtů řady $\sum_k \cos 2k$ (plyne z prvního faktu o „goniometrických“ řadách v úvodu oddílu o konvergenci obecných řad).
Řada konverguje neabsolutně, neboť

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\cos^2 k}{\ln k} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1+\cos 2k}{2\ln k} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{2\ln k} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\cos 2k}{2\ln k},$$

přičemž první z řad napravo konverguje podle Leibnizova kritéria a pro druhou lze užít analogický postup jako v příkladu (**??**) – rozdělení na sudé a liché členy (tím zmizí $(-1)^k$) a použití Dirichletova kritéria.

(i)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A^k}{A^k+1}\sin k,$$

kde $A > 0$.
Řešení:
Pokud $A > 1$, potom řada diverguje, neboť nesplňuje nutnou podmínku konvergence; její koeficienty nekonvergují k nule. Pokud $A = 1$, platí totéž. Pokud $0 < A < 1$, potom

$$\frac{A^k}{A^k+1}|\sin k| \le \frac{A^k}{1+A^k} \le \frac{A^k}{1} = A^k,$$

a protože $\sum A^k$ je absolutně konvergentní (geometrická) řada, řada konverguje absolutně podle srovnávacího kritéria.

(j)

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\sinh\, kx + \cosh\, kx}{e^{2kx}},$$

kde $x \in \mathbb{R}$.
Řešení:
Upravme

$$\frac{\sinh\, kx + \cosh\, kx}{e^{2kx}} = \frac{e^{kx} - e^{-kx} + e^{kx} + e^{-kx}}{2e^{2kx}} = \frac{e^{kx}}{e^{2kx}} = \frac{1}{e^{kx}} = e^{-kx}.$$

Odtud je zřejmé:
1. Pro $x \leq 0$ řada diverguje, neboť nesplňuje nutnou podmínku konvergence; koeficienty řady nekonvergují do nuly.
2. Pro $x < 0$ řada konverguje absolutně, neboť

$$\sum_k |(-1)^k e^{-kx}| = \sum_k (e^{-x})^k$$

je konvergentní geometrická řada, protože $0 < e^{-x} < 1$.

2. (a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$$

Řešení: Pro $|z| < 1$ konverguje absolutně podle limitního podílového kritéria, neboť

$$\lim \frac{\frac{|(-1)^{n+2}|\,|z|^{n+1}}{n+1}}{\frac{|(-1)^{n+1}|\,|z|^n}{n}} = \lim \frac{|z|}{1} \frac{n}{n+1} = |z| < 1.$$

Pro $|z| > 1$ diverguje, neboť limita koeficientů buď neexistuje nebo není nulová.
Pro $z = 1$ řada konverguje podle Leibnizova kritéria (neabsolutně), neboť posloupnost $\{\frac{1}{n}\}$ je monotónní a konverguje k nule.
Pro $z = -1$ řada diverguje, neboť $\frac{(-1)^{n+1}(-1)^n}{n} = -1/n$ a řada $\sum -\frac{1}{n}$ je harmonická s minusem.

(b)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1 + x^{2k}}$$

Řešení: Pokud $x = 0$, řada konverguje absolutně (triviální). Odhad (zapomenutí členu x^{2k} ve jmenovateli)

$$\left| \frac{x^k}{1 + x^{2k}} \right| \leq |x|^k$$

dává, že pro $|x| < 1$ řada konverguje absolutně srovnáním s geometrickou řadou.
Pokud $x = \pm 1$, řada konvergovat nemůže, neboť $a_k = \frac{(\pm 1)^k}{1+(\pm 1)^{2k}} = \frac{(\pm 1)^k}{2} \not\to 0$.
Nechť nyní $|x| > 1$. Potom odhad (zapomenutí jedničky ve jmenovateli)

$$\left| \frac{x^k}{1 + x^{2k}} \right| \leq \left| \frac{x^k}{x^{2k}} \right| = \frac{1}{|x|^k}$$

dává, že řada konverguje absolutně srovnáním s geometrickou řadou.

(c)

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^4 x^k$$

Řešení:
Pro $|x| < 1$ konverguje absolutně podle podílového kritéria, neboť

$$\lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^4 \cdot |x|^{k+1}}{k^4 \cdot |x|^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^4}{k^4} \cdot |x| = |x| < 1.$$

Pokud $|x| \geq 1$, nekonverguje, neboť $\lim k^4 |x|^k = +\infty$, a proto není možné, aby $\lim k^4 x^k = 0$.