11. cvičení

Příklady

1. (a)

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt[n]{3}-1)$$

Řešení: Otestujeme limitu

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}-1=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}-\lim_{n\to\infty}1=1-1=0.$$

Je vidět, že posloupnost je neklesající, tedy z Leibnize řada konverguje,

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}$$

Řešení: Raabe:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{4^n(n!)^2(2n+3)!}{4^{n+1}(n+1)!^2(2n+1)!}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{4}\frac{(2n+3)(2n+2)}{(n+1)^2}-1\right)=$$

$$\lim_{n\to\infty} n\frac{4n^2+10n+6-4n^2-8n-4}{4(n+1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+2n}{4n^2+8n+4}=\frac{1}{2}<1,$$

tedy řada diverguje.

(c)

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{\ln k}$$

Řešení: Řada konverguje podle Leibnizova kritéria, neboť $\frac{1}{\ln k}\xrightarrow{k\to\infty}0$. Posloupnost $\frac{1}{\ln k}$ je zjevně nerostoucí.

(d)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}\frac{1}{n}$$

Řešení: Raabe:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{n+1}{n}\frac{2n+2}{2n+1}-1\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+2n+2n+2-2n^2-n}{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{2n+1} = \frac{3}{2} > 1$$

tedy řada konverguje.

(e)

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n^2+3n+4}{3n^2+2}$$

Řešení: Řada nesplňuje nutnou podmínku konvergence

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n+4}{3n^2+2} = \frac{2}{3} \neq 0,$$

tedy řada diverguje.

2. (a)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}z^n$$

Řešení: Pro $|z| < 1$ konverguje absolutně podle limitního podílového kritéria, neboť

$$\lim \frac{\frac{|(-1)^{n+2}|\,|z|^{n+1}}{n+1}}{\frac{|(-1)^{n+1}|\,|z|^n}{n}} = \lim\frac{|z|}{1}\frac{n}{n+1} = |z| < 1.$$

Pro $|z| > 1$ diverguje, neboť limita koeficientů buď neexistuje nebo není nulová.
Pro $z = 1$ řada konverguje podle Leibnizova kritéria (neabsolutně), neboť posloupnost $\{\frac{1}{n}\}$ je monotónní a konverguje k nule.
Pro $z = -1$ řada diverguje, neboť $\frac{(-1)^{n+1}(-1)^n}{n} = -1/n$ a řada $\sum -\frac{1}{n}$ je harmonická s minusem.

(b)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{1+x^{2k}}$$

Řešení: Pokud $x = 0$, řada konverguje absolutně (triviální). Odhad (zapomenutí členu x^{2k} ve jmenovateli)

$$\left|\frac{x^k}{1+x^{2k}}\right| \leq |x|^k$$

dává, že pro $|x| < 1$ řada konverguje absolutně srovnáním s geometrickou řadou. Pokud $x = \pm 1$, řada konvergovat nemůže, neboť $a_k = \frac{(\pm 1)^k}{1+(\pm 1)^{2k}} = \frac{(\pm 1)^k}{2} \not\to 0$. Nechť nyní $|x| > 1$. Potom odhad (zapomenutí jedničky ve jmenovateli)

$$\left|\frac{x^k}{1+x^{2k}}\right| \leq \left|\frac{x^k}{x^{2k}}\right| = \frac{1}{|x|^k}$$

dává, že řada konverguje absolutně srovnáním s geometrickou řadou.

(c)

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2k^2+3k+4}{2k^4+3}$$

Řešení: Platí, že (pro $k \geq 4$)

$$\left|(-1)^k \frac{2k^2+3k+4}{2k^4+3}\right| = \frac{2k^2+3k+4}{2k^4+3} = \frac{1}{k^2}\frac{2+3/k+4/k^2}{2+3/k^4} \leq \frac{1}{k^2}\frac{2+1+1}{2} = \frac{2}{k^2}.$$

Tento odhad dává absolutní konvergenci naší řady pomocí srovnávacího kritéria.

(d)

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2k^2+3k+4}{2k^3}$$

Řešení:

Odhad

$$\frac{2k^2+3k+4}{2k^3} = \frac{1}{k}\frac{2+3/k+4/k}{2} \geq \frac{1}{k}\frac{2}{2} = \frac{1}{k}$$

dává, že řada nemůže konvergovat absolutně podle srovnávacího kritéria (neboť harmonická řada není konvergentní). Je ale jednoduché ověřit, že

$$\frac{2k^2+3k+4}{2k^3} \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$

Ukážeme, že konvergence je od jistého členu monotónní. Tedy, že

$$\frac{2k^2+3k+4}{2k^3} \geq \frac{2(k+1)^2+3(k+1)+4}{2(k+1)^3}.$$

Úpravou dostaneme

$$2(2k^2+3k+4)(k+1)^3 \geq 2k^3(2k^2+4k+2+3k+3+4)$$
$$2(2k^2+3k+4)(k^3+3k^2+3k+1) \geq 4k^5+14k^4+18k^3)$$
$$4k^5+18k^4+38k^3+46k^2+30k+8 \geq 4k^5+14k^4+18k^3$$
$$4k^4+20k^3+46k^2+30k+8 \geq 0$$

což je samozřejmě pravdivá nerovnost pro libovolné k přirozené.

(e)

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^4 x^k$$

Řešení:
Pro $|x| < 1$ konverguje absolutně podle podílového kritéria, neboť

$$\lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^4 \cdot |x|^{k+1}}{k^4 \cdot |x|^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^4}{k^4} \cdot |x| = |x| < 1.$$

Pokud $|x| \geq 1$, nekonverguje, neboť $\lim k^4|x|^k = +\infty$, a proto není možné, aby $\lim k^4 x^k = 0$.

(f)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \cos(k^2\pi)\left(\sqrt{k+9} - \sqrt{k}\right)$$

Řešení: Platí, že k^2 je liché, právě když k je liché. Proto

$$\cos(k^2\pi) = \cos(k\pi) = (-1)^k.$$

Dále je

$$\sqrt{k+9} - \sqrt{k} = \frac{9}{\sqrt{k+9} + \sqrt{k}} \geq \frac{9}{\sqrt{k}}.$$

Z těchto výpočtů je zřejmé, že řada absolutně konvergovat nemůže (řada $\frac{9}{\sqrt{k}}$ není konvergentní), ale konverguje neabsolutně podle Leibnizova kritéria.

(g)

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k + (-1)^k}$$

Řešení:
Absolutní konvergence je vyloučena odhadem $\frac{1}{2k+(-1)^k} \geq \frac{1}{2k-1}$. Ukážeme, že řada konverguje neabsolutně.
Leibnizovo kritérium lze použít přímo, protože nerovnosti

$$2k{+}1 \leq 2(k{+}1){-}1, \quad 2k{-}1 \leq 2(k{+}1){+}1 \implies \frac{1}{2k + (-1)^k} \geq \frac{1}{2(k+1) + (-1)^{k+1}} \blacksquare$$

jsou pravdivé.

3. Trocha teorie Dokažte, nebo najděte protipříklad.

(a) Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, potom konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1} + a_{2n})$.

Řešení: Nechť $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ (částečný součet první řady) a $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1} + a_{2k})$ (částečný součet druhé řady). Potom platí, že $\sigma_n = s_{2n}$, a tedy posloupnost částečných součtů druhé řady tvoří podposloupnost částečných součtů řady první. A protože libovolná podposloupnost konvergentní posloupnosti konverguje (a to ke stejné limitě), je tvrzení pravdivé.

(b) Pokud $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1} + a_{2n})$ konverguje, potom konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Řešení: Tvrzení není pravdivé. Uvažte posloupnost $a_n = (-1)^n$. Potom první řada $\sum a_n$ má vlastně podobu $-1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1$ a osciluje, kdežto druhá $\sum(a_{2n-1} + a_{2n})$ má podobu $0 + 0 + 0 + 0 + \ldots$ a je zjevně konvergentní.

(c) Pokud $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, potom řada $\sum a_n$ konverguje.

Řešení: Tvrzení není pravdivé. Řada $\sum \frac{1}{n}$ není konvergentní.

(d) Pokud $\sum a_n$ konverguje, potom $a_{n+1} \leq a_n$ pro všechna $n \geq 1$.

(e) Pokud $\sum a_n$ konverguje, potom existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_{n+1} \leq a_n$ pro všechna $n \geq n_0$.

Řešení: Tvrzení jsou zjevně nepravdivá, co třeba řady se zápornými členy $\sum -\frac{1}{n^2}$. Ale i pokud předpokládáme, že $a_n \geq 0$ pro každé přirozené n, přesto najdeme protipříklad. Uvažte posloupnost

$$a_{2n} = \frac{1}{(2n)^2}, \qquad a_{2n+1} = \frac{2}{(2n)^2}.$$

Potom je celkem zřejmé, že $a_{2n+1} \geq a_{2n}$. Přitom řada $\sum a_n$ je konvergentní, neboť $a_{2n} \leq a_{2n+1} \leq \frac{1}{n^2}$ a řada tedy konverguje podle srovnávacího kritéria.