11. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Definice 1. Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost reálných čísel a nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje. Pak říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje absolutně*. Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ nekonverguje, pak říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje neabsolutně*.

Věta 2 (Vztah absolutní konvergence a konvergence)**.** Absolutně konvergentní řada je konvergentní.

Věta 3 (Leibnizovo kritérium)**.** Nechť $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je **nerostoucí** posloupnost **nezáporných** čísel. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$ konverguje právě když $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Věta 4 (Raabeovo kririum)**.** . Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s **kladnými** členy.

(a) Jestliže $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje;

(b) Jestliže $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Příklady

1. Určete, zda následující řady konvergují.

(a)
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt[n]{3}-1)$$

(b)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}$$

(c)
$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{\ln k}$$

(d)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}\frac{1}{n}$$

(e)
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n^2+3n+4}{3n^2+2}$$

2. Rozhodněte o neabsolutní i absolutní konvergenci následujících řad (v závislosti na parametru $z\in\mathbb{R}$).

(a)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}z^n$$

(b)
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{1+x^{2k}}$$

(c)
$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{2k^2+3k+4}{2k^4+3}$$

(d)
$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{2k^2+3k+4}{2k^3}$$

(e)
$$\sum_{k=1}^{\infty}k^4x^k$$

(f)
$$\sum_{k=1}^{\infty}\cos(k^2\pi)\left(\sqrt{k+9}-\sqrt{k}\right)$$

(g)
$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+(-1)^k}$$

3. Trocha teorie. Dokažte, nebo najděte protipříklad.

(a) Pokud $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ konverguje, potom konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$.

(b) Pokud $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$ konverguje, potom konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

(c) Pokud $\lim_{n\to\infty}a_n=0$, potom řada $\sum a_n$ konverguje.

(d) Pokud $\sum a_n$ konverguje, potom $a_{n+1}\le a_n$ pro všechna $n\ge 1$.

(e) Pokud $\sum a_n$ konverguje, potom existuje $n_0\in\mathbb{N}$ takové, že $a_{n+1}\le a_n$ pro všechna $n\ge n_0$.