

9. cvičení

<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/>
kytaristka@gmail.com

Teorie

Věta 1 (Nutná podmínka konvergence). Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní, pak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Věta 2 (d'Alembertovo podílové kritérium). Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada.

(a) Jestliže platí

$$\exists q \in (0, 1) \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \quad \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq q,$$

pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně;

(b) jestliže $\limsup \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně;

(c) jestliže $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně;

(d) jestliže $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$, pak $\{a_n\}$ nekonverguje k 0, a tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Věta 3 (Cauchyovo odmocninové kritérium). Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada.

(a) Jestliže platí

$$\exists q \in (0, 1) \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \quad \sqrt[n]{|a_n|} \leq q,$$

pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně;

(b) jestliže $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně;

(c) jestliže $\lim \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně;

(d) jestliže $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, pak $\{a_n\}$ nekonverguje k 0, a proto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje;

(e) jestliže $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, pak $\{a_n\}$ nekonverguje k 0, a tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Hinty

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Příklady

Určete, zda následující řady konvergují

1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{2^{2n} + 3^{2n}}$$

3.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$$

4.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2n^2}$$

5.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2 + (-1)^k}{7} \right)^k$$

6.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^7}{2^k + 3^k}$$

7.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{5^n}$$

8.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 + \cos n}{2 + \cos n} \right)^n$$

9.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n(n-1)}$$

10.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{2^n - 1}$$

11.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

12.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 - 1}{n^2} \right)^{(n-1)n(n+1)}$$