11. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

1.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{3^k}$$

Řešení: Z identity $\frac{2^k}{3^k} = \left(\frac{2}{3}\right)^k$ plyne, že řada je geometrická s kvocientem menším než 1. Řada je tedy zřejmě konvergentní — dokonce lze snadno určit její součet.

2.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$$

Řešení: Jelikož řada nesplňuje nutnou podmínku konvergence: $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, tak řada diverguje.

3.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$$

Řešení: Použijeme limitní srovnávací kritérium. Jako srovnávací řadu použijeme $b_n := 1/n$ o níž víme, že diverguje. Tedy počítáme limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{n^3}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^3+1} = 1.$$

Jelikož $1 \in (0, \infty)$, tak naše řada konverguje právě tehdy, když konverguje zvolená b_n. Ta diverguje, čili i zadaná řada diverguje.

4.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n^2+5} - \sqrt[3]{n^2+1}$$

Řešení: Nejprve výraz upravíme:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n^2+5} - \sqrt[3]{n^2+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5-n^2-1}{\sqrt[3]{(n^2+5)^2} + \sqrt[3]{(n^2+5)(n^2+1)} + \sqrt[3]{(n^2+1)^2}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^{4/3}}.$$

Jelikož jsme řadu omezili jinou a navíc konvergující řadou, tak zadaná řada taktéž konverguje.

5.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2+3n+4}{2n^2+5}$$

Řešení: 1. Označme $b_n = \frac{2n^2+3n+4}{2n^2+5}$. Zřejmě

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3n+4}{2n^2+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2}\frac{2+3/n+4/n^2}{2+5/n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+3/n+4/n^2}{2+5/n^2} = \frac{2}{2} = 1$$

Označme $a_n = (-1)^n b_n$. Zřejmě $a_{2n} = b_{2n}$, a tedy $\lim a_{2n} = \lim b_{2n} = 1$. Zřejmě $a_{2n+1} = (-1)\cdot b_{2n+1}$, a tedy $\lim a_{2n+1} = -\lim b_{2n} = -1$. Tudíž $\lim a_n$ neexistuje. Řada diverguje, neboť pro konvergentní řadu je limita posloupnosti koeficientů nulová.

6.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+5} - \sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[4]{n}}$$

Řešení: "Odstraněním odmocniny z čitatele" vhodným rozšířením dostaneme

$$\frac{\sqrt[3]{n^2+5} - \sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[4]{n}} = \frac{4}{\sqrt[4]{n}\left(\sqrt[3]{(n^2+5)^2} + \sqrt[3]{n^2+1}\sqrt[3]{n^2+5} + \sqrt[3]{(n^2+1)^2}\right)}$$

Jmenovatel se tedy chová zhruba jako $n^{1/4}\cdot n^{4/3} = n^{17/12}$. Přesněji

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4}{\sqrt[4]{n}\left(\sqrt[3]{(n^2+5)^2} + \sqrt[3]{n^2+1}\sqrt[3]{n^2+5} + \sqrt[3]{(n^2+1)^2}\right)}}{\frac{1}{n^{1/4}\cdot n^{4/3}}} = 4 \neq 0$$

a podle limitního srovnávacího kritéria a předchozího faktu (srovnávali jsme s řadou $\sum \frac{1}{n^{17/12}}$) řada konverguje.

7.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}\sqrt{2n+3}}$$

Řešení: Použijeme limitní srovnávací kritérium a srovnání s řadou $\sum \frac{1}{n}$. Protože

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{2n+1}\sqrt{2n+3}}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} \neq 0$$

řada diverguje.

8.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k - 2^k}{3^k + 2^k}$$

Řešení: Platí, že

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{3^k - 2^k}{3^k + 2^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{3^k}{3^k}\cdot\frac{1-(2/3)^k}{1+(2/3)^k} = \frac{1}{1}\cdot\frac{1-0}{1+0} = 1.$$

Řada diverguje, neboť její koeficienty nesplňují nutnou podmínku pro konvergenci: $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

9.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2+1/n)^n}$$

Řešení: Řada konverguje, neboť $\frac{1}{(2+1/n)^n} \leq \frac{1}{2^n}$.

10.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n}+2n}{n^2+2n^3}$$

Řešení: Řada konverguje podle srovnávacího kritéria, neboť

$$\frac{n\sqrt{n}+2n}{n^2+2n^3} = \frac{n\sqrt{n}}{n^3} \cdot \frac{1+2n^{-1/2}}{2+1/n} \leq \frac{1}{n^{3/2}} \cdot \frac{1+2}{2+0} = \frac{3}{2}\frac{1}{n^{3/2}}.$$

11.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$$

Řešení: Řadu odhadneme zdola pro $n \geq 3$:

$$\frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}} \geq \frac{1}{\ln n} \geq \frac{1}{n}.$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje, tedy i zadaná řada diverguje.

12.
$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\ln k}$$

Řešení: Použijeme srovnávací kritérium. Pro $k > e^2$ je $k^{-\ln k} = \frac{1}{k^{\ln k}} < \frac{1}{k^2}$. Řada konverguje, neboť konverguje řada $\sum \frac{1}{k^2}$.