Limita posloupnosti - komplexní úloha X

Určete limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{4^n + 3^n \sin(2^n)}{5^n + 4^n \cos(n!)}}. = \frac{4}{5}$$

Řešení

VOAL x2

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{4^n + 3^n \cdot \sin(2^n)}{5^n + 4^n \cdot \cos(n!)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{5} \cdot \sqrt[n]{\frac{\frac{4^n}{4^n} + \frac{3^n}{4^n} \cdot \sin(2^n)}{\frac{5^n}{5^n} + \frac{4^n}{5^n} \cdot \cos(n!)}} \overset{\downarrow}{=}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4}{5} \cdot \frac{\lim \sqrt[n]{1 + \frac{3^n}{4^n} \cdot \sin(2^n)}}{\lim \sqrt[n]{1 + \frac{4^n}{5^n} \cdot \cos(n!)}} \overset{\boxed{*}}{=} \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{1} = \underline{\underline{\frac{4}{5}}}$$

tedy dobře ~~...~~ definovaná odmocnina !
od 0 je ohraničena

$\boxed{*}$ Potřebujeme ukázat, že $a_n = 1 + \frac{3^n}{4^n} \cdot \sin 2^n$ je oddělená od 0. ~~Potom~~ $\lim \sqrt[n]{a_n} = 1$ (I)

za pomoci odhadu

$-1 \le \sin 2^n \le 1$ (z def. funkce $\sin(x)$); maximum posloupnosti $\frac{3^n}{4^n} = \frac{3}{4}$ (geometrická posloupnost, $q = \frac{3}{4} \Rightarrow q < 1$)

a tedy $\frac{1}{4} \le 1 + \frac{3^n}{4^n} \cdot \sin 2^n \le 2$ z věty o 2 policajtech (II)

tudíž $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{4}} \le \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + \frac{3^n}{4^n} \cdot \sin 2^n} \le \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} \overset{(I)}{\Rightarrow} 1 \le \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + \frac{3^n}{4^n} \cdot \sin 2^n} \le 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + \frac{3^n}{4^n} \cdot \sin 2^n} = 1$

Analogicky pro $b_n = 1 + \frac{4^n}{5^n} \cdot \cos(n!)$ ($-1 \le \cos(n!) \le 1$ z def. funkce $\cos x$)($\frac{4^n}{5^n} \Rightarrow \frac{4}{5}$)

$\frac{1}{5} \le 1 + \left(\frac{4}{5}\right)^n \cdot \cos(n!) \le 2 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{5}} \le \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + \left(\frac{4}{5}\right)^n \cdot \cos(n!)} \le \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 \le \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + \left(\frac{4}{5}\right)^n \cdot \cos(n!)} \le 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + \left(\frac{4}{5}\right)^n \cdot \cos(n!)} = 1$

z (II)